Coordinatore editoriale: Luciana Zuccheri
Collaboratori editoriali: Paola Gallopin e Verena Zudini

Pubblicazione realizzata con contributi della Regione Friuli-Venezia Giulia (L. R. 19/2004 SRD) e dell'Università degli Studi di Trieste

Autore del logo: Davide Comelli

impaginazione
Gabriella Clabot

ISBN 978-88-8303-204-2

EUT - Edizioni Università di Trieste

p.zzale Europa, 1 – 34127 Trieste
http://eut.units.it

La matematica dei ragazzi

Scambi di esperienze tra coetanei

Antologia delle edizioni 2004–2006

a cura di
Luciana Zuccheri
Paola Gallopin
Verena Zudini

EUT EDIZIONI UNIVERSITÀ DI TRIESTE

Dedichiamo questo volume a chi, nel suo piccolo,
ha deciso di cambiare il mondo e, nonostante le difficoltà,
continua a perseguire questa meta,
come i tanti insegnanti e docenti universitari
che amano la loro professione e la svolgono con impegno.

sommario

Premessa

La quinta e la sesta edizione della manifestazione "*La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei*", organizzata dal Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Trieste, si sono svolte, rispettivamente, negli anni 2004 e 2006. Rispetto alle precedenti edizioni, esse sono state caratterizzate da un maggior numero di laboratori presentati da classi di scuola secondaria superiore: ciò si deve all'adesione al gruppo di ricerca di nuove insegnanti che hanno conseguito l'abilitazione presso la S.S.I.S.S. dell'Università di Trieste. Un'altra novità è costituita dal fatto che entrambe le volte ha partecipato alla presentazione dei lavori anche una classe di un istituto italiano con lingua d'insegnamento slovena.

In particolare, la sesta edizione è stata veramente da record. Infatti, grazie anche all'alto numero di laboratori presenti (ben dodici) gestiti da classi di varie province della Regione Friuli-Venezia Giulia, è stato possibile accogliere un numero di visitatori che mai era stato raggiunto: più di mille, provenienti da varie parti della Regione e anche da scuole della Slovenia con lingua d'insegnamento italiana. Sommando a questi i circa trecento ragazzi che fungevano da "relatori", si ha che, nelle due giornate, più di milletrecento tra ragazzi e bambini, di età compresa tra i 5 e i 18 anni, hanno potuto parlare tra loro di matematica, o meglio *della loro matematica*.

Se infatti è vero che il lavoro di preparazione dei laboratori viene fatto dalle classi nell'arco dell'anno scolastico insieme ai rispettivi insegnanti, che a loro volta collaborano all'interno del Nucleo di Ricerca Didattica, bisogna sottolineare che esso non è assolutamente fondato su un apprendimento passivo della materia, ma, al contrario, su apprendimenti acquisiti con tecniche attive di collaborazione, incentivanti l'autonomia degli allievi anche nella scelta delle modalità di comunicazione ai visitatori, che possono essere di età molto diversa.

Come nelle edizioni precedenti, nel corso delle due manifestazioni, anche se in un primo momento alcuni docenti hanno dovuto "dare il la" per smuovere un po' la timidezza di qualche allievo, i ragazzi hanno preso subito in mano la situazione e hanno superato da soli i problemi, man mano che questi si presentavano, come ad esempio le improvvise domande di chiarimenti o le visite di bambini più piccoli del previsto, gettandosi alla rocambolesca ricerca dei modi più semplici per farsi capire.

Quanto viene proposto nei laboratori, la cui durata non può superare i 25-30 minuti, ha soprattutto l'obiettivo di stimolare l'interesse dei bambini e ragazzi visitatori verso gli argomenti trattati, che possono essere poi approfonditi con i loro docenti. Si è potuto osservare che tale interesse viene sollecitato dall'interazione diretta con i coetanei e ancor più, nel caso dei bimbi più piccoli, dal forte ascendente che hanno su di loro i ragazzi più grandi, visti un po' come fratelli maggiori. L'interesse dei bambini della scuola primaria è talmente vivace che anche i ragazzi più grandi preferiscono di solito interagire con loro piuttosto che con gli altri visitatori.

Ringrazio i dirigenti scolastici degli istituti triestini che hanno ospitato la manifestazione, ovvero il prof. Marcello Buda (I.C. "Divisione Julia", sede della V edizione) e la prof.ssa Marina Rocco (I.C. "Tiziana Weiss", sede della VI edizione), unitamente al personale docente e non docente di tali scuole, per averci accolto.

Ringrazio le docenti-ricercatrici (questa volta è d'obbligo il femminile!) del Nucleo di Ricerca Didattica per l'impegno che hanno profuso nel partecipare a questa attività in tutte le sue fasi. Similmente a quanto fatto per gli allievi nella ricerca presentata alla fine del volume, sarebbe interessante comprendere le loro spinte motivazionali, che probabilmente sono riassunte nella dedica scritta all'inizio.

Un grazie particolare va a Paola Gallopin e a Verena Zudini per il loro prezioso aiuto nella redazione, piuttosto laboriosa, di questo volume.

Luciana Zuccheri
Coordinatrice del Nucleo di Ricerca Didattica
del Dipartimento di Matematica e Informatica
dell'Università di Trieste

Presentazione

Nel presente volume, il terzo dedicato alla manifestazione “*La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei*”, abbiamo raccolto la documentazione relativa alle edizioni svoltesi negli anni 2004 e 2006.

Rispetto ai precedenti volumi pubblicati, esso raccoglie un numero maggiore di contributi scritti, in forma di relazione, da parte dei docenti. Tali relazioni descrivono, in modo più o meno ampio, la complessa attività di partecipazione al progetto, dalla preparazione dei laboratori nell’arco dell’anno scolastico fino allo svolgimento della manifestazione, e contengono commenti sulle ricadute e valutazioni del lavoro effettuato nelle singole classi.

Sono ben sette (su dieci laboratori presentati) le relazioni contenute nella prima parte del volume, che descrivono l’attività svolta nella quinta edizione (2004), e ben undici (su dodici laboratori) nella seconda parte, quelle riguardanti la sesta edizione (2006). Tra queste ultime è stata inclusa una relazione sull’inserimento nelle attività del progetto di un ragazzo disabile, affetto da una patologia rara, la sindrome di Sotos.

La “voce” dei ragazzi è presente anche in questo volume, in forma diretta, nelle descrizioni dei laboratori da loro scritte allo scopo di invitare gli altri ragazzi a visitarli, e in forma indiretta, nelle relazioni dei docenti.

Il volume si conclude con una ricerca svolta analizzando i dati raccolti tramite un questionario somministrato alle classi partecipanti. La ricerca si propone di focalizzare le motivazioni che spingono gli allievi a prendere parte a questo lavoro, per loro veramente impegnativo, sia per le difficoltà concettuali e relazionali che esso comporta, sia per il tempo impiegato, tenuto conto che per molti di loro l’attività si svolge in orario extracurricolare.

Luciana Zuccheri, Paola Gallopin e Verena Zudini

parte prima

La matematica dei ragazzi
Scambi di esperienze tra coetanei

Quinta edizione
Trieste, 6-7 maggio 2004

Programma

Codici e messaggi più o meno… segreti
Classe IV, Scuola Elementare Statale "G. Carducci" di Duino-Aurisina (Trieste)
docente: C. Scheriani

Probabilmente… l'abbiamo combinata bella!
(Giochi di probabilità e combinatoria nella scuola elementare)
Classe V A, Scuola Elementare "F.lli Visintini" di Trieste
docente: E. Onofrio

Alla scoperta della… calcolatrice grafica: 2ª puntata
Classi II e III, Scuola Media Statale "Via Roma" di Mariano del Friuli (Gorizia)
docente: G. Candussio

Assi, bisettrici ed altro ancora
Classe II C, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste
docente: M. Rocco

Troppo piccolo, troppo grande
Classe III C, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste
docente: M. Rocco

I cristalli: qualcosa di… "naturalmente" matematico
Classe III D, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste
docente: N. Gasparinetti

Segreti, codici e spie / Skrivnosti, šifre in vohuni
Classe II P, Liceo Pedagogico "A. M. Slomšek" di Trieste
docente: J. Santi

Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi
Classe I, Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia" di Gorizia
docente: L. Mucelli

Verso l'infinito… e oltre
Classe IV A, Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana (Udine)
docenti: E. Curci ed E. Matassi

Pitagoricamente parlando
Classe I A, Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste
docente: P. Gallopin

Descrizione dei laboratori

Codici e messaggi più o meno… segreti (*C. Scheriani*)

Sunto: I bambini della Scuola "G. Carducci" presentano un lavoro su codici ed alcuni elementi di crittografia facendo una carrellata sui più usuali codici utilizzati nella vita comune: codici a barre, codice fiscale ecc., evidenziando in essi l'uso della matematica. Affrontano poi alcuni elementi di crittografia attraverso l'uso di semplici strumenti. Propongono ai visitatori alcuni giochi su queste tematiche.
Per bambini e ragazzi dalla quarta elementare alla seconda media.

Probabilmente… l'abbiamo combinata bella!
(Giochi di probabilità e combinatoria nella scuola elementare) (*E. Onofrio*)

Sunto: Il laboratorio si articola in due momenti: nella prima parte si analizza il significato del concetto di probabilità e della terminologia specifica (evento, spazio degli eventi, evento favorevole…) e, attraverso l'esperienza con monete e dadi a più facce, si scoprono alcuni aspetti del calcolo combinatorio (utilizzo del reticolo cartesiano, ricerca di regolarità aritmetiche). Nella seconda parte del laboratorio vengono proposti alcuni giochi, di diversa difficoltà, inventati e realizzati dai bambini, in cui la strategia vincente è data dal miglior utilizzo del calcolo delle probabilità.
Per bambini e ragazzi dall'ultimo anno di scuola materna fino alla terza media.

Alla scoperta della… calcolatrice grafica: 2ª puntata (*G. Candussio*)

Sunto: Continuano le nostre esperienze sull'uso di nuove tecnologie nell'ambito di percorsi di matematica e scienze: da *Cabri Jr* ai sensori *on line*, speri-

mentando, provando e… giocando con la calcolatrice grafica per imparare divertendosi.
Per bambini e ragazzi dalla quarta elementare in su.

Assi, bisettrici ed altro ancora (*M. Rocco*)

Sunto: Il laboratorio riorganizza per la presentazione al pubblico il percorso didattico di geometria in II Media, svolto con il supporto del Simmetroscopio e di *Cabri*. Vi si studiano le costruzioni necessarie per ricavare assi e bisettrici in triangoli e quadrilateri, e se ne osservano le posizioni reciproche.
Per bambini e ragazzi dalla prima elementare alla terza media.

Troppo piccolo, troppo grande (*M. Rocco*)

Sunto: Il laboratorio (che presenta qualche connessione con altri, vedi "Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi") propone attività pratiche sulla misura. Verranno evidenziati i procedimenti matematici sfruttati ed eventualmente ne verranno fornite le giustificazioni.
Per bambini e ragazzi dalla prima elementare alla terza media.

I cristalli: qualcosa di… "naturalmente" matematico (*N. Gasparinetti*)

Sunto: Entrerete nel magico mondo dei cristalli: cinque gruppi di ragazzi vi parleranno delle proprietà dei cristalli, delle strutture, della simmetria, illustreranno con modellini costruiti da loro le "forme" che la natura ha dato alle pietre più conosciute; qualche curiosità in più sul carbonio e le sue forme allotropiche; semplici esperimenti di laboratorio per ottenere bellissimi cristalli di solfato di rame e allume di rocca, per calcolare la densità di alcuni campioni di minerali… E poi qualche esercizio (e tante domande!) anche per i visitatori della mostra.
Per bambini e ragazzi dalla prima media alla prima superiore.

Segreti, codici e spie / Skrivnosti, šifre in vohuni (*J. Santi*)

Sunto: I ragazzi presenteranno due laboratori. Il primo sarà rivolto ai bambini delle scuole elementari. In esso spiegheranno la cifratura attraverso il cifrario a rotazione, nel secondo invece proporranno agli allievi delle medie la cifratura a sostituzione completa ed alcuni metodi per risolvere un crittogramma. In entrambi i casi alla parte teorica seguirà una parte pratica in cui

i visitatori potranno cimentarsi con la cifratura e la decifratura di brevi messaggi di testo.
Predvideni sta dve delavnici, ki ju bosta vodili dijaki. V prvi delavnici, namenjeni osnovnošolcem, bo govora o Cezarjevi metodi šifriranja. V drugi, namenjeni srednješolcem, pa o zamenjalnih šifrah in nekaterih metodah, ki služijo za dešifriranje tajnih sporočil. Uvodnemu delu bo v obeh delavnicah sledil praktičen del, v katerem bodo lahko obiskovalci sami šifrirali in dešifrirali krajša sporočila.
Per bambini e ragazzi dalla prima elementare alla terza media.

Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi (*L. Mucelli*)

Sunto: Si presenteranno i cinque teoremi tradizionalmente attribuiti a Talete, a vari livelli: da quello più intuitivo fino alla loro dimostrazione geometrica, utilizzando anche modelli concreti di vario tipo.
Per bambini e ragazzi dalla quarta elementare al primo biennio della scuola secondaria superiore.

Verso l'infinito… e oltre (*E. Curci ed E. Matassi*)

Sunto: Cosa significa che un insieme è infinito? Gli insiemi infiniti godono delle stesse proprietà di quelli finiti? È possibile pensare a "diversi tipi" di infinito? E ancora: matematici e filosofi definiscono l'infinito nello stesso modo? Sono solo alcuni degli interrogativi che verranno proposti ai visitatori all'interno di un affascinante viaggio nel mondo dell'infinito attraverso la matematica, la filosofia e la fisica. Il laboratorio, articolato su diversi livelli in relazione all'età dei visitatori, vedrà gli allievi protagonisti di un percorso conoscitivo di avvicinamento al concetto di infinito sulle tracce di Giordano Bruno, Galileo e Cantor.
Per ragazzi della scuola media inferiore e superiore. Presente solo il 7 maggio.

Pitagoricamente parlando (*P. Gallopin*)

Sunto: Partendo dalla presentazione del Teorema di Pitagora, il percorso al quale il visitatore viene invitato prevede la costruzione delle terne pitagoriche e una introduzione al concetto di numero irrazionale. La presentazione delle tematiche trattate è adatta sia agli studenti degli ultimi anni della scuola elementare, per i quali è previsto un approccio più intuitivo, sia agli studenti del primo biennio delle scuole medie superiori.
Per bambini e ragazzi dalla quarta elementare al primo biennio della scuola superiore.

I laboratori descritti dagli allievi

Codici e messaggi più o meno … segreti

Classe IV, Scuola Elementare Statale "G. Carducci" di Duino-Aurisina (Trieste)

La classe quarta, della scuola "G. Carducci" di Aurisina, ha deciso di partecipare ad un Convegno di matematica.

L'argomento su cui parleremo sarà basato sui "codici segreti". La maestra Cinzia ci ha aiutato a comprendere meglio l'argomento portandoci a vedere un film intitolato *A Beautiful Mind* nel quale c'era un grande matematico, che era stato chiamato dagli Americani del Pentagono per decifrare un codice segreto. Il codice era composto da una serie di numeri che lui guardava con attenzione tanto che, a un certo punto, capì che corrispondevano a dei punti che rappresentavano la latitudine e la longitudine di alcuni luoghi su una mappa. Solo dopo i militari del Pentagono capirono che i codici si riferivano a traiettorie di missili russi. Quindi abbiamo capito che i messaggi segreti servono per non fare capire agli altri quello che vogliamo trasmettere. Ma parlando di "codici" non sapevamo molto allora la maestra ci ha fatto vedere i codici a barre.

Una mattina è venuta una tirocinante dell'Università a farci una piccola lezione sui codici a barre per vedere se avevamo capito qualcosa. I codici a barre vengono posizionati sulle confezioni di cibi e bevande che si vendono al supermercato, ma anche su altri oggetti. La maestra infatti ci ha portato al supermercato del paese di Aurisina dove abbiamo visto i codici su tutti i prodotti.

Questi codici sono formati da barre bianche e nere; quando si passa il prodotto sul lettore ottico questo lo legge e lo invia ad un computer. Le prime due cifre indicano lo stato da cui proviene. Poi abbiamo giocato con i codici ed abbiamo provato ad interpretarli. Peter ha portato i codici di una scatola di biscotti inglesi, infatti lui è nato a Liverpool e la sua mamma è inglese.

Abbiamo scoperto che, sulle prove di verifica che aveva mandato il Ministero, c'era un codice a barre per ogni fascicolo e su ogni fascicolo c'era il nome di un alunno.

Non ci siamo fermati qui, abbiamo poi scoperto come si scrive un codice fiscale, i codici dei libri e il CAP cioè il Codice di Avviamento Postale. Il più difficile era il codice fiscale (bisogna fare un sacco di calcoli per trovare l'ultima lettera). In classe ci siamo divisi i compiti, dopo aver fatto questo un gruppo si è occupato dei geroglifici, un altro dei codici in generale.

La maestra ci sta leggendo un libro che si chiama "Codici e segreti": è molto particolare infatti è da lì che abbiamo saputo come nascondevano i messaggi, c'era anche chi li scriveva sulla testa pelata di un messaggero e poi gli faceva ricrescere i capelli e lo mandava a comunicare il messaggio. Lavorare con i codici è bellissimo, abbiamo costruito una doppia ruota in cartone con lettere e numeri per decifrare messaggi ed abbiamo provato a farne anche noi.

All'inizio abbiamo usato il libro di lettura, la maestra ci ha chiesto di leggere un pezzo di brano, di contare quante volte si ripetevano le lettere dell'alfabeto. Poi ciascuno di noi ha segnato con le crocette la "frequenza" delle lettere nel brano e le abbiamo confrontate e riordinate così abbiamo scoperto che le vocali che si ripetevano più spesso non erano quelle che pensavamo noi. Però questo lavoro è utile per capire, in un testo in codice, quali possono essere le più frequenti.

Subito dopo abbiamo iniziato a preparare i cartelloni e i giochi che porteremo al convegno, alcuni di noi hanno fratelli che hanno già partecipato, siamo un po' ansiosi, speriamo che vada tutto bene e che il nostro lavoro piaccia e serva anche agli altri bambini per saperne di più sui codici.

Probabilmente… l'abbiamo combinata bella!

Classe V A, Scuola Elementare "F.lli Visintini" di Trieste

Udite! Udite! Tutti i bambini e ragazzi della scuola elementare e media sono invitati ad un laboratorio della "Matematica dei Ragazzi" dove vi mostreremo i giochi di probabilità e combinatoria.

Noi… come abbiamo fatto?

Per capire meglio la probabilità inizialmente abbiamo inventato un oggetto chiamato "*probabilometro*" formato da una piattaforma con dei buchi, dei bastoncini e delle palline con un buco per infilarle nei bastoncini. Il "probabilometro" serve a misurare e a registrare le possibilità che un evento accada. Funziona così: si inseriscono sul bastoncino tante palline quanta è la possibilità che noi riteniamo abbia un evento di verificarsi. Lancio un dado da 6 → uscirà un numero tra 1 e 6: è una certezza positiva e quindi riempirò il "probabilometro" con tutte le 10 palline. Lancio un dado da 6 → uscirà il numero 3: è una probabilità e quindi riempirò il "probabilometro" usando da 1 a 9 palline. Lancio un dado da 6 → uscirà il numero 8: è impossibile, quindi è una certezza negativa, allora lascerò il "probabilometro" vuoto.

Più informazioni abbiamo più è semplice stabilire il corretto valore di probabilità. Mentre se non abbiamo informazioni sufficienti è opportuno ripetere l'esperimento più volte. Inoltre abbiamo trovato informazioni su personaggi importanti che si sono occupati di giochi con i dadi come Dante, Galileo e Pascal. Abbiamo fatto alcuni giochi con i dadi e abbiamo trovato le combinazioni con dadi diversi (da 4, da 6, da 8, da 12 e da 20) e abbiamo registrato i dati sul "*piano cartesiano*", cioè una tabella che conoscerete visitando il laboratorio. Poi abbiamo inventato dei giochi che farete anche voi per capire meglio e divertirvi gareggiando fra compagni.

Perchè dovreste venire?

Vi divertirete un mondo!

Imparerete molte cose e andrete meglio in matematica.

Saprete un pizzico di storia della matematica.

Insomma... diciamocelo: non potete rifiutare un'offerta così. Non potete mancare e non vedere questo laboratorio se no ci offendiamo! Ma che giochi potrete fare?

Gioco	*Età*
Colora la mongolfiera	ultimo anno materna – 1ª elementare
Pilù e le mele	ultimo anno materna – 1ª-2ª elementare
Dov'è l'entrata?	1ª-2ª-3ª elementare
Il tesoro degli Hobbit	2ª-3ª-4ª elementare
Tranello maledetto	dalla 4ª elementare
Quadratini a volontà!	dalla 4ª elementare
Sfida nella terra di mezzo	5ª elementare – medie

Venite! Venite ragazzi a visitare il laboratorio di PROBABILITÀ e COMBINATORIA perchè veramente... L'ABBIAMO COMBINATA BELLA!

ALLA SCOPERTA DELLA... CALCOLATRICE GRAFICA: 2ª PUNTATA

Classi II e III, Scuola Media Statale "Via Roma" di Mariano del Friuli (Gorizia)

Continuano le nostre esperienze sull'uso di nuove tecnologie nell'ambito di percorsi di matematica e scienze: da "*Cabri Jr*" ai sensori on line, sperimentando, provando e... giocando con la calcolatrice grafica per imparare divertendosi.

Le nostre proposte – La calcolatrice grafica è un "mini calcolatore" che è in grado, oltre che di fare calcoli come una normale calcolatrice scientifica, anche di eseguire grafici e di rilevare varie grandezze fisiche grazie a dei sensori e al loro collegamento con una particolare interfaccia. Noi ragazzi riteniamo che sia sicuramente utile come strumento per le scuole. Noi abbiamo fatto molte prove con questo strumento, ma moltissime "cose" ancora non le sappiamo. Vi proporremo diversi esperimenti con sensori per capire, divertendosi, non solo come funziona la calcolatrice grafica, ma anche alcune operazioni matematiche.

Si potrà provare il programma per calcolatrici grafiche "*Cabri Jr*" e, facendo alcune prove, il sensore di temperatura e il sensore di voltaggio: tutto ciò potrà essere visto da tutti su lavagna luminosa (mediante il "*View screen*", una particolare interfaccia) e per poter spiegare meglio potremo usare come traccia una presentazione in *Power Point* e cartelloni da noi creati in precedenza; potremo inoltre far provare anche a voi alcuni esperimenti. Allo scopo ci siamo organizzati in gruppi suddividendoci il lavoro. Cercheremo così di rispondere ad alcune domande fondamentali: cos'è? come funziona? come si fa? a cosa serve? cosa si vede? cosa si ottiene?...

Coinvolgendovi con domande e prove cercheremo di guidarvi lungo un percorso graduale spiegando prima a grandi linee il funzionamento della calcolatrice, proponendo poi gli esperimenti più semplici da spiegare e da capire con i sensori adatti alla comprensione dei più piccoli, e quindi proseguendo mostrando prove più complesse, come quelle con i sensori di voltaggio, spiegandole e facendole provare (essendo esse più complicate sarebbero adatte ad alunni delle medie e di scuole superiori).

Anche con *Cabri* la nostra proposta è simile: per i visitatori più piccoli cominceremo con la costruzione di figure più semplici e poi per i più grandi illustreremo anche alcune proprietà.

Il nostro programma prevede quindi:

– la calcolatrice grafica e le sue principali funzioni, costruzione di semplici grafici e alcune applicazioni in matematica;
– *Cabri Jr* e alcune applicazioni e utilizzazioni in geometria, semplici costruzioni geometriche e dimostrazioni;
– i sensori di voltaggio e di temperatura funzionamento, presentazione e illustrazione di alcuni esperimenti con prove pratiche.

Con le nostre esperienze e i nostri esperimenti noi ci siamo divertiti da matti, volete provare anche voi?

Assi, bisettrici ed altro ancora

Classe II C, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste

Il nostro intento è di insegnare o almeno interessare i visitatori al mondo della geometria. Ci avventureremo in questo mondo grazie a due strumenti:

– il simmetroscopio, un oggetto molto particolare che permette a chi ci lavora di "vedere con due visuali": attraverso uno speciale specchio che permette di vedere il proprio riflesso come uno specchio normale ma anche cosa accade dietro lo specchio;
– il computer, nello specifico con un programma chiamato *Cabri*, grazie a cui si possono esaminare e costruire tutte le forme geometriche possibili grazie ai comandi forniti da quello che ci lavora.

Alcuni di noi spiegheranno come si usano i simmetroscopi ed il programma *Cabri* per trovare i punti notevoli dei triangoli: le bisettrici degli angoli interni che generano l'incentro, le tre mediane che generano il baricentro, le tre altezze, i tre assi dei lati che generano il circocentro, le tre bisettrici degli angoli esterni. Altri lavorano sui quadrilateri:
– dopo essere stati assegnati a questo lavoro abbiamo cominciato grazie a un programma per computer a creare tutte le figure riguardanti i quadrilateri;
– ora che abbiamo finito di "disegnare" le figure, abbiamo cominciato a farne le rispettive istruzioni per costruirle con questo programma *Cabri* così che gli ospiti che arriveranno potranno come noi avventurarsi nel mondo di *Cabri*.

Io spiegherò attraverso *Cabri* il mondo dei quadrilateri: le loro caratteristiche e le loro speciali particolarità. Di questo argomento in particolare spiegherò cosa succede costruendo le bisettrici dei quadrilateri e c'è proprio da stupirsi!

Nel gruppo della DIMOSTRAZIONE lavoriamo per dare delle spiegazioni orali e scritte sui disegni fatti. Svolgiamo questo compito attraverso dei teoremi. Abbiamo disegnato le bisettrici interne, le mediane, e gli assi dei lati su tante figure; poi abbiamo trascritto quello che si ottiene dalle bisettrici delle figure con delle didascalie corrispondenti.

Quando dovremo esporre il nostro lavoro saremo in grado di dare adeguate spiegazioni.

Troppo piccolo, troppo grande

Classe III C, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste

In questa manifestazione matematica la nostra classe ha deciso di trattare l'argomento: la *misura*. In particolare misureremo cose piccolissime o molto grandi, ad esempio granelli di sabbia e la piramide di Cheope.

Nel nostro gruppo misureremo due cose relativamente facili, ma nel percorso incontrerete argomenti per cui abbiamo speso tempo e pazienza.

Troverete sette postazioni, noi siamo la prima di queste e vi mostreremo:
– come si trova il peso di un fagiolo
– lo spessore di un foglio.

Per quanto riguarda le altre postazioni:
– nella seconda troverete lo spessore di una moneta
– nella terza il peso di un chicco di riso
– nella quarta il diametro di un granello di sabbia
– il peso di un granello di sabbia
– l'altezza della nostra aula
– il peso della piramide di Cheope.

Buon divertimento alla scoperta della misura!!!

I cristalli: qualcosa di… "naturalmente" matematico

Classe III D, Scuola Media Statale "Divisione Julia" di Trieste

In questo lavoro di gruppo vogliamo dimostrare come si possono unire degli argomenti matematici con degli altri scientifici.

Inizialmente abbiamo diviso la classe in cinque gruppi e assegnato ad ognuno un compito diverso a seconda dell'argomento.

Il primo gruppo si occupa della cristallizzazione e della densità con due esperimenti: il primo consiste nel calcolare la densità di un minerale avendo il peso, calcolato con una bilancia specifica, e il volume, misurato mettendo il minerale dentro un cilindro graduato e guardando quanto l'acqua si è alzata. Il secondo gruppo si occupa degli assi di simmetria eseguendo dimostrazioni pratiche con solidi costruiti con il cartoncino bristol e stuzzicadenti infilati nei punti di simmetria. Il terzo si occupa della descrizione, formazione, lavorazione delle pietre preziose prendendo informazioni dai libri della biblioteca e spiegandone i particolari. Il quarto gruppo si occupa delle strutture e modelli di cristalli e solidi platonici dimostrandone, con l'uso di cartoncino e palline di cellulosa, la loro formazione e quella ipotizzata dallo scienziato Hooke. Infine l'ultimo gruppo si occupa del fullerene, i nanotubi, e una parte della storia dei cristalli facendo una ricerca approfondita e costruendo il diamante e la grafite usando delle palline derivate dal petrolio.

Questi gruppi, attraverso esperimenti, dimostrazioni e cartelloni cercheranno di approfondire i vari argomenti.

Segreti, codici e spie / Skrivnosti, šifre in vohuni

Classe II P, Liceo Pedagogico "A. M. Slomšek" di Trieste

Frequentiamo la 2ª classe del Liceo Pedagogico "A. M. Slomšek" con lingua di insegnamento slovena di Trieste e sorprendentemente in classe siamo solo in cinque: Kevin, Sara, Emma Malina, Maddalena ed Emanuela. Dato che la nostra compagna di classe Maddalena scarabocchiava spesso e volentieri sul suo banco (e non solo il suo!!!) frasi crittate, mossi soprattutto dalla curiosità di violare il suo codice segreto e decifrare il significato di quegli strani scarabocchi, ci è venuta voglia di apprendere le basi della crittografia.

Anche se non siamo ancora riusciti a trovare la chiave del suo codice, insieme alla nostra professoressa di matematica abbiamo trattato il misterioso mondo della crittografia, la sua storia ed il suo sviluppo ed in particolare il cifrario a rotazione (o di Cesare) e il cifrario a sostituzione completa che intendiamo presentare in due laboratori distinti. Uno lo dedicheremo interamente ai bambini delle scuole elementari e il secondo ai ragazzi delle medie. Nel primo spiegheremo come cifrava Cesare e nel secondo la cifratura a sostituzione completa ed alcuni metodi per risolvere un crittogramma.

La cifratura a sostituzione completa venne descritta molto bene da Edgar Allan Poe in uno dei suoi racconti, *"Lo scarabeo d'oro"*, che la professoressa ci ha consigliato (ordinato!!) di leggere. Verso la fine del racconto il protagonista spiega ad un suo amico, che è anche il narratore interno, come è riuscito a trovare il punto in cui si trovava nascosto un tesoro. Così gli rivela di aver trovato una mappa sulla quale c'era un messaggio crittato e di essere riuscito a decrittarlo servendosi di uno schema delle frequenze con cui le lettere compaiono nella lingua del messaggio, cioè l'inglese.

Attraverso il racconto abbiamo così scoperto che per poter decrittare un testo cifrato tramite un codice segreto è bene conoscere la frequenza con cui le lettere compaiono in un contesto scritto: infatti tale frequenza è caratteristica di una determinata lingua. Abbiamo anche notato che, più lungo risulta essere il testo crittato, più facile è la sua decrittazione.

Scoprire il mondo della crittografia è stato interessante e decrittare gli aneddoti cifrati della *"Settimana Enigmistica"* anche molto divertente.

Obiskujemo drugi razred pedagoškega liceja s slovenskim učnim jezikom *"Anton Martin Slomšek"* v Trstu. V razredu smo v petih: Kevin, Sara, Emma Malina, Maddalena in Emanuela. S tajnopisi smo se začeli ukvarjati, ker je naša sošolka Maddalena pogosto in rade volje svojo (in ne samo svojo!!!) klop packala s šifriranimi stavki. Tako nas je prevzela strašna radovednost, da bi razvozlali njeno skrivno šifro in tako razumeli skrivnosten pomen tistih čudnih stavkov in pack.

Tudi če (na žalost!) nismo še uspeli odkriti ključa Maddalenine skrivne pisave, smo skupaj z našo profesorico matematike obravnavali očarljivi svet tajnopisov, ki nas je močno prevzel, njegovo zgodovino in njegov razvoj. Še posebej smo obravnavali Cezarjevo metodo šifriranja in zamenjalne šifre; te bomo predstavili v dveh različnih delavnicah. Eno delavnico bomo celotno posvetili otrokom osnovnih šol, drugo mladim nižjih srednjih šol. V prvi delavnici bomo obrazložili, kako je Julij Cezar šifriral, v drugi pa bomo obravnavali zamenjalne šifre ter nekatere metode za reševanje kriptograma.

Zamenjalno šifriranje je zelo dobro opisal Edgar Allan Poe v povesti "*Zlati sharabej*", ki nam jo je profesorica svetovala (naročila!) v branje. Proti koncu povesti junak razloži svojemu prijatelju, ki je tudi pripovedovalec, kako je našel točko, v kateri je skrit zaklad. Tako mu razkrije, da je našel karto, na kateri je bilo šifrirano sporočilo, in da ga je dešifriral tako, da se je poslužil frekvenčnega histograma črk jezika, v katerem je napisano sporočilo, to se pravi angleščine. Z branjem te povesti smo tako odkrili, da je pri dešifriranju nekega besedila s pomočjo skrivne šifre dobro poznati pogostost, s katero se črke pojavljajo v pisanem jeziku, saj je takšna pogostost značilna za določen jezik. Opazili smo tudi, da veliko lažje dešifriramo daljše šifrirane tekste. V daljših besedilih pridejo namreč statistične značilnosti jezika bolj do izraza.

Zelo zanimivo je bilo spoznati svet tajnopisov in dešifrirati šifrirane anekdote iz tednika "*La settimana enigmistica*". Ta dejavnost nas je še posebej zabavala.

Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi

Classe I, Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia" di Gorizia

Noi, ragazzi della classe prima del Liceo Linguistico "P. d'Aquileia", siamo lieti di partecipare alla *Matematica dei Ragazzi* per proporvi i cosiddetti cinque teoremi di Talete.

Con l'aiuto della nostra insegnante, abbiamo lavorato tutti assieme per cercare di dimostrare queste proposizioni che a prima vista possono apparire piuttosto articolate. Innanzi tutto bisogna spiegare il significato di *teorema*: è una proposizione che si dimostra come conseguenza degli *assiomi*, cioè delle "regole del gioco" che si assumono senza darne una dimostrazione, ed enuncia proprietà più complesse, anche non individuabili con la semplice osservazione.

Sicuramente vi starete chiedendo chi era Talete: gli antichi erano d'accordo nel giudicarlo un uomo di intelligenza fuori dal comune, ed è stato spesso acclamato come primo vero matematico...

I cinque teoremi dei quali ci siamo occupati noi sono i seguenti:

1. un cerchio viene diviso in due parti congruenti dal diametro
2. gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti
3. due rette che si intersecano formano angoli opposti al vertice congruenti
4. ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto
5. alcuni studiosi riportano che egli fu in grado di misurare l'altezza delle piramidi egiziane osservando la lunghezza delle loro ombre nel momento in cui l'ombra di un bastoncino verticale era uguale alla sua altezza.

Illustrarvi questi teoremi non sarà semplice, perché la geometria che si studia al liceo si differenzia sostanzialmente da quella studiata alla medie: mentre alle medie si utilizzano delle formule studiate a memoria, ora si procede senza l'ausilio di regole fisse, basandosi solo sul ragionamento logico; in questo modo ciascuno mette alla prova le proprie capacità e la propria logica!

Per presentare i teoremi abbiamo svolto un lungo lavoro di preparazione. Abbiamo pensato di dividerci in cinque postazioni, per ciascuna delle quali abbiamo realizzato un cartellone con l'enunciato e la dimostrazione dei teoremi, e dei modellini e giochi di cartoncino curati appositamente per facilitare e rendere più divertente ed immediata l'apprensione dei concetti. In alcuni casi ci siamo serviti di un particolare ragionamento, detto ragionamento per assurdo. Esso consiste nel negare la tesi del teorema, ovvero l'obiettivo da raggiungere, e vedere se ciò porta ad una contraddizione. Se ciò accade, necessariamente la tesi deve essere vera...

Comunque speriamo di avervi incuriosito con questa breve presentazione, e ci auguriamo di avervi presto nostri ospiti a Trieste, per darci la possibilità di provare a spiegarvi il nostro lavoro cercando di farvi capire in modo semplice e divertente la geometria di Talete. Noi ce la metteremo tutta! Vi aspettiamo numerosi per esplorare e comprendere assieme Talete ed i suoi teoremi...

Verso l'infinito... e oltre

Classe IV A, Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana (Udine)

Ciao a tutti ragazze e ragazzi!!!

Noi siamo studenti, proprio come voi. Frequentiamo la classe 4ª del Liceo Scientifico di Latisana e vogliamo proporvi un viaggio... *verso l'infinito e oltre!*

Vi siete mai posti domande sul problema dell'infinito? Vi siete mai chiesti *cos'è* l'infinito? Se la risposta è sì, questo è il laboratorio giusto per voi! Se la risposta è no, è ora di iniziare a domandarvelo... Scoprirete, proprio come noi, che trovare delle risposte può essere molto interessante! Infatti, solo pochi tra noi si erano posti il problema, prima di iniziare a pensarci veramente, insieme, in classe...

Abbiamo iniziato questo nostro lavoro riflettendo su delle provocazioni suggeriteci dai prof, che hanno stimolato la nostra curiosità. Domande come: "Cos'è l'infinito?" oppure "Esistono DIVERSI infiniti?" oppure ancora "L'universo è infinito?". Quindi, abbiamo cercato di rispondere: inizialmente, abbiamo dato delle soluzioni semplici e personali, poi, guidati dai prof di matematica, fisica, filosofia e storia dell'arte, abbiamo ricostruito la "storia dell'infinito" e abbiamo scoperto che le risposte che sono state date sono tante, tantissime. Ciò ci ha spesso stupiti e ci ha spinti a riflettere ulteriormente su questa questione.

È stato un percorso interessante, che ci ha impegnati in diverse maniere: con lezioni tenute appositamente dai prof, lavorando in gruppi di due o tre persone, impegnate in lavori di ricerca e rielaborazione del materiale, trovato curiosando su libri e internet, collaborando poi per realizzare il risultato finale. Partendo dalla storia matematica e filosofica dell'infinito, dalle origini al giorno d'oggi, ci siamo soffermati ad osservare i punti di vista di vari studiosi che si sono occupati di questa importante questione, giungendo infine a darne una definizione matematicamente rigorosa, ma per nulla complicata. Sembra strano che, per un dilemma che ha impegnato menti illustri ed eccelsi pensatori per secoli, possa esserci una soluzione tanto semplice, vero? Eppure è proprio così...

Abbiamo deciso di suddividere il nostro laboratorio in diversi "angoli", ognuno adibito ad una delle discipline nel cui ambito abbiamo analizzato il tema; i vari angoli saranno poi corredati di materiali, cartelloni esplicativi, ecc.

Se siamo riusciti ad incuriosirvi, venite a trovarci... Sarà interessante osservare insieme le applicazioni dell'infinito nell'arte o il suo ruolo nelle teorie sull'universo e sul *Big Bang*!

Pitagoricamente parlando

Classe I A, Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste

Noi ragazzi della I A del Liceo Scientifico "G. Galilei" abbiamo deciso di proporvi un viaggio nel mitico mondo dei pitagorici e di Pitagora. Scoprirete alcuni aspetti del teorema su cui sono stati fatti innumerevoli studi e ricerche, tramite cartelloni e attività interattive di laboratorio. Rimarrete sorpresi da quanto possa essere divertente giocare con Pitagora e i suoi amici.

Durante la visita vi saranno presentati i seguenti argomenti:

- due interessanti dimostrazioni del teorema di Pitagora
- metodi per trovare nuove interessanti terne pitagoriche
- un cartellone dedicato ai numeri irrazionali e alle loro proprietà
- un cartellone dedicato a Pitagora e i pitagorici.

Sarà poi approfondito il tema della dimostrazione del teorema tramite un'esperienza pratica di laboratorio che verterà sulla formula $a^2 + b^2 = c^2$.

Abbiamo dedicato molto tempo alla realizzazione di questo ambizioso progetto e naturalmente ci siamo imbattuti in difficoltà ed imprevisti: per prima cosa abbiamo, tramite ricerche personali, approfondito gli argomenti e studiate le varie proprietà e regole matematiche; poi abbiamo cominciato ed elaborare testi, pannelli grafici e disegni per la realizzazione di cartelloni che avrebbero poi accompagnato l'esposizione orale elaborata da noi studenti. Naturalmente questo impegnativo lavoro è stato diretto dalla nostra professoressa di matematica che ha coordinato l'elaborazione di testi e cartelloni.

Le colonne portanti su cui si baserà la presentazione saranno le attività di laboratorio e l'esposizione orale su cui ci siamo particolarmente concentrati. Ogni gruppo esporrà gli argomenti principali già menzionati. L'esplicazione orale sarà, come avete già capito, accompagnata da attività pratiche sul Teorema di Pitagora che vi coinvolgeranno personalmente, e vi faranno divertire e sarete in grado di capire meglio le spiegazioni. Su ogni cartellone espositivo troverete dei divertenti disegni che vi renderanno ulteriormente chiari gli argomenti esposti.

Per noi ragazzi è stata un'esperienza incredibile e siamo molto orgogliosi dei risultati ottenuti e saremo lieti di presentarvi l'argomento che ci ha ispirati nel migliore dei modi possibile. Ci assicureremo che abbiate capito gli argomenti esposti, anche tramite vostri personali quesiti e suggerimenti. Non mi resta che salutarvi e dirvi arrivederci a Maggio e soprattutto buon divertimento, perché è più bello imparare divertendosi.

Codici e messaggi più o meno… segreti

Cinzia Scheriani*

Già dall'antichità, i popoli hanno cercato di trasmettere messaggi segreti con fini diversi. E, naturalmente, nello stesso tempo, ci sono stati popoli che hanno tentato di decifrare tali messaggi, utilizzandoli per altri fini. Per i bambini, avvicinarsi all'idea di poter usare un messaggio segreto è motivo di grande entusiasmo e sviluppa non solo la creatività, ma anche gli aspetti più comuni del calcolo e dell'intuizione logica.

Il progetto relativo al tema è iniziato nel mese di settembre 2003, con la classe quarta della Scuola Elementare "G. Carducci" di Duino-Aurisina (Trieste). Come tutti i progetti, esso è stato inserito nel P.O.F. d'Istituto, quale parte di un'attività più ampia denominata *"Potenziamento matematico"*. A essa viene dedicata un'ora settimanale in più rispetto a quelle curricolari, essendo una delle tre attività aggiuntive deliberate dal Collegio dei Docenti dell'Istituto[1].

Per iniziare, ho pensato di proporre la visione del film *"A beautiful Mind"*, in cui si racconta la storia del matematico John Nash, che ritiene di essere coinvolto in una serie di vicissitudini legate anche ai servizi segreti. La visione del film è stata solo parziale ed è stata tagliata dopo la sequenza riguardante la decrittazione, da parte del protagonista, di una serie di messaggi individuati dal controspionaggio.

Per i bambini, la parola *"codice"* ha costituito un'immediata fonte di curiosità; dopo la visione del film, questa curiosità è aumentata, dandomi l'opportunità di introdurre l'argomento, tanto complesso e affascinante.

Così è nata l'idea del laboratorio, al quale è stato dato il nome di *"Codici e messaggi più o meno... segreti"*.

Il tema è stato affrontato inizialmente a partire dai codici, che non hanno aspetti di segretezza, e successivamente il lavoro è continuato con scambio di messaggi mediante cifrari, con chiave non nota a tutti, seguendo la traccia delle sperimentazioni didattiche sulla crittografia già svolte in anni precedenti. Esporrò qui, però, solo la parte relativa al lavoro sui codici.

Per affrontare l'argomento "codici", ho utilizzato la lettura di testi che potessero chiarire ai ragazzi alcune curiosità storiche e ho pensato che fosse opportuno ricercare quali potevano essere i codici che vengono normalmente utilizzati nella vita quotidiana, come ad esempio il codice fiscale, il codice postale, il codice a barre.

Il lavoro iniziale ha visto coinvolti tutti i bambini nell'approfondimento delle tematiche, e solo in un secondo momento i bambini hanno continuato il lavoro a coppie, a seconda del loro interesse.

Alcune ricerche sono state condotte utilizzando Internet, altre attraverso testi ed enciclopedie. Al termine, ogni coppia ha scelto una parte specifica e ha preparato, per essa, attività pratiche da proporre ai visitatori (giochi, scritture con codici diversi, ecc.).

Il lavoro è stato quindi presentato alla manifestazione nell'arco delle due giornate, ridiscusso in classe in tutti i suoi aspetti, teorici, emotivi e d'impatto con un ambiente nuovo.

L'unità di apprendimento

Gli obiettivi dell'unità di apprendimento sono stati i seguenti:
- utilizzare modalità nuove per l'apprendimento della matematica;
- favorire la collaborazione fra alunni;
- utilizzare un metodo di condivisione nella ricerca;
- creare nuove possibilità per i diversamente abili.

I bambini spesso vedono la matematica come una disciplina rigida, poco creativa e, a volte, pesante, ripetitiva e noiosa. Per questo motivo, nelle classi in cui lavoro, prediligo l'aspetto della ricerca, la stimolazione alla curiosità e il "fare" visto come costruzione della conoscenza.

Sono sicuramente i principi pedagogici più attuali: i teorici ne parlano; gli "addetti ai lavori" (docenti universitari di pedagogia e didattica) indicano le vie per attuare tale processo; nel concreto, però, solo il lavoro "sul campo" permette di analizzare le fasi della conoscenza e di rimodellare le condizioni, affinché tutti possano costruire, in modo partecipe, il proprio sapere. Un apprendimento della matematica "dinamico" è ritenuto anche un apprendimento motivante e durevole.

Le dinamiche di classe non sempre sono le migliori, s'instaurano rapporti conflittuali fra pari, a volte incompatibilità, che generano, all'interno del gruppo classe, tensioni, spesso d'ostacolo al sereno vivere quotidiano. È quindi necessario creare condizioni adeguate per rimodellare il gruppo, valutando i bisogni dei bambini, siano essi espressi o taciti; ciò permette di modificare, anche attraverso il tutoring, le situazioni in modo positivo.

La condivisione del lavoro di ricerca (bibliografica, in Internet, …) nasce dalla necessità di approfondire gli argomenti affrontati, e quindi lavorare in un piccolo gruppo, o a coppie, permette ai bambini di condividere motivazioni e, soprattutto, di sentirsi parte di una squadra.

Nella classe ci sono alcuni bambini diversamente abili, per i quali tutto è stato preparato minuziosamente, soprattutto per evitare un impatto emotivo negativo nel momento della presentazione del proprio lavoro ai visitatori.

Le fasi metodologiche sono state le seguenti:
– la conoscenza;
– la ricerca storica e l'approfondimento;
– la rielaborazione delle conoscenze;
– la scelta degli argomenti da presentare alla manifestazione.

Nella prima fase, come detto in precedenza, è stato dato spazio alla visione parziale di un film, dove, per la prima volta, si notava come il protagonista si ponesse nei confronti di una sequenza di codici numerici. Poi, attraverso la lettura di alcune parti tratte da testi, l'argomento è stato affrontato dal punto di vista storico, partendo dalla decifrazione dei geroglifici e, in particolar modo, dalla Stele di Rosetta. Nella seconda fase sono anche stati ricercati i codici utilizzati nella vita quotidiana e sono stati analizzati gli aspetti matematici presenti in essi. Nella terza fase, è stato verificato se i bambini avessero compreso e rielaborato le conoscenze in merito alla ricerca e allo studio fatto sull'argomento.

Nell'ultima fase, sono state formate le coppie che avrebbero presentato l'attività alla manifestazione. Ciascuna coppia ha poi lavorato alla preparazione del proprio intervento, valutando anche la possibilità di presentare ai visitatori alcuni giochi relativi agli argomenti trattati.

I contenuti

Il codice a barre

Il codice a barre (EAN) è una successione di elementi scuri ed elementi chiari alternati, che si trova sulla confezione di qualsiasi prodotto acquistato. Dal codice a barre possiamo riconoscere la nazione nella quale il prodotto è stato confezionato e possiamo inoltre verificare se tale codice sia esatto, come si vedrà da questo esempio:

80	01440	00983	9
prefisso della nazione (italia)	codice del produttore	codice del prodotto	cifra di controllo

Per controllare l'esattezza dei codici a barre si considerano i posti (pari o dispari) occupati dalle cifre del codice, come nella seguente tabella:

D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D
8	0	0	1	4	4	0	0	0	9	8	3	9

Quindi si seguono queste regole:

1. si sommano tutti i numeri di posto pari e il risultato ottenuto si moltiplica per 3 (nel nostro caso otteniamo: 17 x 3 = 51);
2. si sommano tutti i numeri di posto dispari tralasciando l'ultimo (nel nostro caso si ottiene 20);
3. si sommano tali numeri (nel nostro caso si ottiene 71);
4. si aggiunge l'ultimo numero di posto dispari non sommato in precedenza (nel nostro caso si ottiene 80);
5. poiché i numeri EAN sono tutti multipli di 10, avendo noi ottenuto 80, si ha un controllo dell'esattezza del codice.

Il Codice di Avviamento Postale

Spesso i bambini non sanno che esiste, fra i vari codici, il CAP (Codice di Avviamento Postale) e gli stessi adulti tralasciano a volte di indicarlo. Abbiamo quindi scoperto questo "nuovo codice" verificando ciascuno la corrispondenza familiare e trovando codici diversi. Il viaggio delle spedizioni postali ha colpito i bambini, che hanno voluto ricercare come vengono predisposti i codici delle diverse località geografiche.

A questo proposito hanno condotto un'indagine a scuola, chiedendo a tutti gli insegnanti i codici delle città di provenienza (nella nostra scuola ogni docente proviene da una diversa provincia), e hanno così scoperto alcune particolarità. Ad esempio, hanno scoperto che le prime due cifre indicano il territorio in cui è situata una data provincia (ad esempio, 34 vale sia per la provincia di Trieste che per quella di Gorizia), che la terza cifra indica se la località è capoluogo di provincia o no e che le ultime due cifre si riferiscono ad una zona interna ad un capoluogo di provincia o alla provincia.

Il codice fiscale

Il lavoro sui codici stava diventando complesso, ma era ancora comprensibile, finché non abbiamo affrontato il codice fiscale, che a volte anche noi adulti abbiamo una certa difficoltà a ricordare (e non sempre sappiamo a cosa si riferisce). Dopo aver raccontato ai bambini che tale codice viene utilizzato da tutti (ci accompagna nella vita quotidiana, soprattutto negli ambiti economici, e, di recente, anche in quello medico, per i certificati) e che essi stessi ne hanno uno personale, è nata in loro la volontà di sapere a cosa si riferisse. Abbiamo quindi cercato in Internet la composizione del codice, poi, dopo averla analizzata e compresa, i bambini, opportunamente aiutati, hanno scritto i codici di tutti i docenti della scuola.

Il codice fiscale è formato da una combinazione di lettere e numeri e viene quindi detto "alfanumerico". Esso è composto da 16 caratteri e possiamo risalire al nostro codice personale dai dati di riferimento. Ad esempio:

TFF	GCM	94D19	L424	K
prime consonanti del cognome o vocali	prime consonanti o vocali del nome	anno, mese e giorno di nascita	caratteri del luogo di nascita	lettera di controllo

Per quanto riguarda i caratteri del cognome, vengono scelti la prima, la terza e la quinta consonante oppure, se non ci sono tre consonanti, vengono considerate la prima e la seconda, poi una vocale. Anche per il nome le regole sono simili, a parte il caso in cui esso contenga quattro o più consonanti e i caratteri scelti sono quindi la prima, la terza e la quarta consonante. La data di nascita fa riferimento all'anno, poi al mese (ogni mese viene contraddistinto da una lettera: gennaio con la A, febbraio con la B ecc.). Il giorno rimane invariato per i maschi, e, se va da 1 a 9, deve essere preceduto dallo 0 (01 - 02…); se si considera una femmina, è necessario aggiungere il numero 40. Per il numero relativo al luogo di nascita, ciascuno di noi ha quello del luogo in cui è nato. L'ultima lettera è quella di controllo e, utilizzando un procedimento basato su di una serie di operazioni aritmetiche, serve a verificare se i 15 caratteri precedenti sono esatti. Il comune o lo stato estero di nascita (quattro caratteri) si possono trovare su due testi: *Codice dei Comuni d'Italia* e *Codice degli Stati Esteri*.

La verifica sul campo

Vista la quantità di lavoro fatta dai bambini, si può pensare all'emozione della giornata, anzi di quelle due giornate. Dal mio punto di vista, sono rimasta estremamente sorpresa dalla capacità dei bimbi di ricevere una così grande moltitudine di classi di visitatori; tutti erano piuttosto stanchi. Un bimbo in situazione di handicap sensoriale è stato affiancato da una studentessa, tirocinante della Facoltà di Scienze della Formazione, che ha partecipato a tutto il lavoro e vi ha contribuito anche con una propria unità minima di apprendimento, legata ai codici a barre. Anche l'emozione della ragazza, durante la manifestazione, era tangibile.

Sono state giornate di condivisione, iniziata già al mattino, quando siamo scesi dall'Altipiano Carsico con le automobili di due genitori (noi siamo costretti a partire presto per raggiungere il centro della città, dove si svolge la manifestazione); abbiamo pranzato assieme e una mamma ci ha raggiunti portando cioccolatini per i bambini (si sa, la cioccolata "aiuta"!). Nel pomeriggio, al termine della giornata, rientrando in macchina a scuola verso le 18.00, pensavo alla stanchezza dei bimbi; in automobile, invece, c'erano continui commenti sui visitatori, sulle capacità dei compagni, sugli altri laboratori. La discussione che è seguita nei giorni successivi mi ha fatto capire che gli obiettivi che mi ero posta, sia in merito all'argomento matematico, sia dal punto di vista emotivo, erano stati non solo raggiunti, ma ampliati da altre piccole variabili impreviste.

Conclusioni

Finora ho partecipato, con le mie classi, a tutte le edizioni di "La matematica dei ragazzi". Ciò mi ha dato modo di lavorare con i bambini in modo diverso, e soprattutto di comunicare loro il mio entusiasmo per la ricerca e il mio interesse verso la matematica. Non ho mai perso di vista le loro difficoltà, né i problemi legati alla disciplina (molti concetti trattati erano infatti piuttosto complessi per una quarta classe). Sarebbe a tal proposito opportuno riflettere sulle modalità della formazione dei docenti in merito al sapere disciplinare e, soprattutto, alla didattica disciplinare, che, nel caso della matematica, non può essere legata a una conoscenza episodica, ma deve costituire una delle basi della preparazione del docente ed essere oggetto di un continuo aggiornamento in servizio.

NOTE

* Scuola Elementare "G. Carducci",
Aurisina Cave, 85, I-34100 Duino-Aurisina (Trieste)
e-mail: cinziascheriani@virgilio.it

1 Le tre attività sono: Potenziamento linguistico per la lingua italiana, matematico e di lingua inglese, per una durata totale, per le attività curriculari, di 27 ore e, per quelle opzionali, di 3.

BIBLIOGRAFIA

Bersani R., Peres E., 1998, *Matematica: corso di sopravvivenza*, Ponte alle Grazie, Milano.

Jacq C., 1999, *Il segreto dei geroglifici: come imparare a decifrare la scrittura degli antichi egizi*, Piemme, Casale Monferrato.

Nasar S., 1998, *Il genio dei numeri*, Rizzoli, Milano.

Singh S., 1999, *Codici e segreti*, Rizzoli, Milano.

Probabilmente… l’abbiamo combinata bella!
(Giochi di probabilità e combinatoria nella scuola elementare)

Eva Onofrio*

In questa relazione intendo presentare alcuni spunti per un possibile itinerario per lo studio della probabilità nella scuola primaria. Il lavoro è stato svolto in una classe V durante l’intero anno scolastico e si è concretizzato nella realizzazione di un laboratorio presentato alla V edizione di “La matematica dei ragazzi”, svoltasi nel 2004.

La scelta di questo argomento è frutto di alcune riflessioni sulle indicazioni didattiche e psicopedagogiche dei programmi della scuola elementare, che sottolineano l’importanza di sviluppare negli alunni una mentalità il più possibile flessibile e aperta e affermano che *“importanza educativa notevole va riconosciuta anche a concetti, principi e capacità connessi (…) con l’elaborazione di giudizi e di previsioni in condizioni di incertezza”*. Questa considerazione mi sembra molto importante in una società, come la nostra, che non a caso si definisce “dell’incertezza”. La logica a due valori (vero/falso) trova raramente riscontro nell’esperienza di tutti i giorni, quando dobbiamo continuamente scegliere tra possibili alternative, affrontando situazioni di incertezza. Ne consegue che un obiettivo educativo di fondo, fin dai primi anni di scolarizzazione, dovrebbe essere quello di stimolare la capacità di razionalizzare e contestualizzare le decisioni, sapendo scegliere tra le varie soluzioni possibili quella che offre maggiori garanzie di risultati soddisfacenti.

Bruno De Finetti, uno dei maggiori studiosi della teoria della probabilità, sostiene che questa, «*prima ancora di avere bisogno di appoggiarsi al calcolo (…) altro* *non è che il buon senso stesso: quella specie di buon senso che induce a soppesare, in base a tutti gli argomenti ed elementi disponibili, il grado di fiducia più o meno grande nei riguardi di ogni cosa, rifuggendo da sconsiderate affermazioni di impossibilità o di certezza*».

Quindi tra il certo e l'impossibile, il sì e il no, troviamo l'"incerto", il "forse che sì, forse che no" (come l'hanno definito i bambini), il più o meno probabile.

Volendo sviluppare un percorso didattico coerente e significativo, il primo problema che ci troviamo ad affrontare è proprio il concetto di "evento fortuito". Secondo Piaget, la negazione del fortuito è una delle caratteristiche del pensiero del bambino in età prescolare. Il bambino è convinto che niente si verifichi per caso, che ogni evento sia la manifestazione di un'intenzionalità propria delle persone o degli oggetti, e quindi tende a privilegiare una logica di tipo binario vero/falso, giusto/sbagliato, sì/no. Secondo Fischbein, invece, il bambino possiede già in età prescolare un'intuizione di evento casuale e conseguentemente di probabilità, anche se soltanto in situazioni molto semplici. Dobbiamo quindi sfruttare queste intuizioni per avvicinare precocemente il bambino al pensiero probabilistico prima della conquista del pensiero formale, quando ormai ha già assunto un atteggiamento deterministico. Fischbein punta il dito proprio sull'insegnamento scolastico che, privilegiando quasi esclusivamente l'interpretazione deterministica dei fatti e dei fenomeni, induce un atteggiamento di chiusura nei confronti del probabile e dell'incerto in genere.

Per quanto riguarda l'argomento "probabilità", i libri di testo della scuola elementare presentano quasi esclusivamente la concezione di "probabilità classica", senza partire da problemi significativi per rappresentare uno scenario di incertezza in cui esercitare la capacità di previsione.

Il superamento della logica binaria del vero/falso e l'accettazione del fortuito necessita di una maturazione affettiva oltre che cognitiva, poiché, come tutti sappiamo, l'incertezza ci turba, ci preoccupa, e può generare angoscia. Sapersi porre di fronte alle situazioni in modo oggettivo, senza lasciarsi influenzare da attese e desideri, ed essere disposti a coglierne i cambiamenti, è una grossa conquista che nemmeno tutti gli adulti possiedono. La nozione di probabilità nasce, a un primo livello, proprio come tentativo di dominare, almeno in parte, gli eventi fortuiti, essendo in grado di prevederli o meglio di prevedere la loro possibilità di accadere. Le situazioni di incertezza possono così essere gestite emotivamente perché sono controllate dal nostro pensiero attraverso i processi di anticipazione, previsione, ipotesi, cioè di razionalizzazione di fatti, avvenimenti e fenomeni della realtà di cui pure non possediamo tutte le informazioni.

Il gioco costituisce l'occasione più immediata per avvicinare il bambino al mondo del probabile, per farlo riflettere in situazioni di incertezza, come avviene in tutti quei giochi in cui la riuscita individuale non è determinata dall'abilità, dall'agilità o dalla forza del giocatore, ma dalla sua capacità nel saper scegliere, tra le varie mosse possibili, quella che offre maggiore probabilità di vittoria. Il gioco, anche nell'immaginario collettivo, è spesso accostato al concetto di probabilità (lotterie varie, giochi d'azzardo, ...). Didatticamente esso è un mezzo potente perchè permette ai bambini di lasciare spazio alla fantasia, di esprimersi più liberamente nel rispetto delle regole del gioco stesso, di scegliere strategie senza preoccuparsi di valutazioni da parte dell'insegnante, di socializzare interagendo con i compagni, di confrontare le proprie strategie con quelle degli altri e decidere quale applicare in momenti o partite successive, di formulare ipotesi di risoluzione considerando contemporaneamente varie possibilità/opzioni, di esercitarsi per impadronirsi di abilità/competenze trasferibili in altri ambiti di apprendimento.

Il lavoro di riflessione sul linguaggio ha di per sé un notevole valore pedagogico e formativo: ragionare su una situazione incerta, nella quale le prospettive non sono un sicuro sì o un sicuro no, induce a un comportamento flessibile ed elastico, ben diverso da quello più rigido che si assume in situazioni "corretto /sbagliato". Infatti, anche in semplici giochi in cui è richiesta una previsione, il bambino si trova a un certo punto a dover riconsiderare la propria scelta e a valutare meglio quella altrui: ciò significa sia costruire gradualmente nel bambino un atteggiamento corretto di fronte alla scienza, sia abituarlo ad avere aspettative più realistiche.

In "La matematica dei ragazzi", l'accento è posto, al di là dei contenuti specifici presentati nei vari laboratori, sul modo di veicolare tali contenuti: appunto "lo scambio di esperienze e conoscenze tra coetanei". Questo implica, da parte dei ragazzi, un lavoro di riflessione sui propri percorsi di ragionamento e di apprendimento: non è sufficiente aver capito o assimilato un concetto, bisogna anche essere in grado di renderlo fruibile agli altri. È necessario modificare il proprio linguaggio a seconda di chi ci sta di fronte e non seguire percorsi standard, ma adeguarli in base all'età, alle conoscenze e alla capacità di comprensione dell'interlocutore. È proprio la capacità di trasmettere un sapere che ci rende pienamente consapevoli e padroni della conoscenza stessa.

Obiettivi

Cognitivi:
- comprensione e analisi delle espressioni "certo", "possibile", "impossibile", ma anche "quasi certo", "quasi impossibile", "forse";
- distinzione sia lessicale che concettuale tra le espressioni "possibile" e "probabile" / "impossibile" e "improbabile";
- scoperta che l'impossibilità è una certezza;
- introduzione del concetto di "probabilità" (soggettiva, frequentista, classica);
- acquisizione di semplici elementi di combinatoria.

Trasversali:
- sviluppare le capacità collaborative;

– sviluppare le capacità argomentative (affinare l'uso del linguaggio dal punto di vista argomentativo e di esplicitazione del proprio pensiero);
– sviluppare le capacità metacognitive (riflessione sul proprio modo di ragionare, di rielaborare le informazioni, di operare scelte, ...).

Modalità dell'intervento

Dato che l'orario della scuola prevedeva un prolungamento pomeridiano, in fase di progettazione degli orari si è pensato di dedicare queste due ore settimanali all'attività di "laboratorio matematico".

L'attività è iniziata a ottobre con le seguenti caratteristiche:

– i bambini si sono organizzati autonomamente suddividendosi in quattro gruppi (da 4 o 5 alunni, la composizione dei gruppi è variata nel corso dell'anno);
– tutte le unità didattiche si sono svolte mantenendo la struttura di "lavori di gruppo", cioè ogni gruppo produceva un elaborato proprio (schema, testo, tabella, disegno, ...), che poi veniva presentato e discusso con gli altri gruppi.

Lo scopo finale di ogni gruppo era quello di ideare, progettare e costruire uno o più giochi da presentare a "La matematica dei ragazzi". Il gioco doveva basarsi su esperienze e "scoperte" fatte durante le ore di laboratorio. Al laboratorio di "La matematica dei ragazzi" avremmo presentato anche oggetti e strumenti ideati e costruiti da noi, e cartelloni per illustrare il percorso seguito e le scoperte fatte.

Il laboratorio

Postazione n° 1

Probabilità e Probabilometro

Il probabilometro è strumento ideato dai bambini per visualizzare il concetto di "probabilità".

Testi prodotti dai bambini e usati come traccia alla manifestazione:
In questo laboratorio si parla di PROBABILITÀ. Ma cos'è la PROBABILITÀ?
Ogni giorno, in ogni momento noi ci troviamo di fronte a dei fatti che possiamo definire CERTI. Per esempio, se dico: "Io sto indossando una maglietta rossa", voi che cosa rispondete? "NO". Oppure se dico: "Jessica indossa i jeans", voi che cosa rispondete? "SÌ". Questi sono fatti o eventi CERTI perché si riferiscono a fatti o eventi che stanno succedendo qui e adesso, e quindi tutti possiamo controllare se sono veri o no. Ma se io dico: "Domani indosserò una maglietta rossa" oppure

"La mia amica che è a scuola indossa una maglietta rossa", voi che cosa risponderete? (risponderete booh, non so, forse, può darsi). E perché non potete rispondere come prima sicuramente sì oppure sicuramente no?

Perché sono cose (o fatti o eventi) che non avvengono qui e ora, ma o nel futuro oppure in un altro posto che noi non vediamo. Di tutte le cose che devono ancora avvenire, cioè del futuro, o di quelle del presente o del passato di cui però non abbiamo tutte le informazioni, non possiamo dire con certezza "sì" o "no", cioè se sono sicuramente vere o sicuramente false; possiamo dire solo che sono possibili o probabili.

Tra le cose possibili, alcune hanno più probabilità di essere vere o di avverarsi nel futuro, altre meno.

Noi possiamo attribuire un valore di probabilità a ogni evento: naturalmente più informazioni abbiamo, più verosimile sarà la nostra "previsione".

Per capire meglio la probabilità abbiamo inventato il probabilometro.

Il probabilometro è uno strumento che registra la probabilità che un evento accada. È formato da una piattaforma con un buco nel mezzo, nel quale è inserito un bastoncino (noi abbiamo usato l'abaco); in questo bastoncino si infilano tante palline quanta è la probabilità che l'evento accada.

Ci sono tre tipi di cose che si possono verificare:

- *certezza positiva:* è la certezza che un evento accada sicuramente. Per esempio: "Lancio due dadi da 6. Uscirà un numero tra il 2 e il 12."

- *certezza negativa:* è la certezza che quell'evento non accada. Per esempio: "Lancio un dado da 6. Uscirà il numero 7."

- *incertezza*: Per esempio: "Lancio un dado da 6. Uscirà il numero 3."

Se il probabilometro è quasi tutto pieno, vuol dire che riteniamo che è molto probabile che quell'evento si verifichi. Se, invece, è pieno a metà, vuol dire che stimiamo la probabilità al 50%, e, se è riempito con meno di 5 palline, allora la probabilità che stimiamo è bassa.

Noi possiamo attribuire a ogni evento un valore di probabilità: naturalmente più informazioni abbiamo, più la probabilità è verosimile.

Noi abbiamo inventato questo strumento, il PROBABILOMETRO, per misurare la probabilità che hanno i vari eventi di verificarsi.

Il probabilometro misura la probabilità soggettiva, cioè la probabilità che ognuno di noi, in base alle sue conoscenze, assegna a un certo fatto.

Funziona così:
- sull'asta si possono infilare da 0 a 10 palline;
- se mettiamo 0 palline, vuol dire che siamo sicuri che quella cosa non accadrà o che non è accaduta (certezza negativa);

- se mettiamo tutte e 10 le palline, vuol dire che siamo sicuri che quella cosa accadrà o è già accaduta (certezza positiva);
- quando non siamo sicuri se una cosa può o non può accadere, mettiamo da 1 a 9 palline;
- se mettiamo tante palline, vuol dire che pensiamo che quel fatto ha molte probabilità di essere vero o di avverarsi;
- se mettiamo poche palline o una sola pallina vuol dire che pensiamo che quel fatto abbia poche o pochissime probabilità di avverarsi.

Probabilometro e frequenza

Testi prodotti dai bambini e usati come traccia alla manifestazione:
Adesso proviamo a fare un altro gioco sempre usando il probabilometro.

In questa scatola abbiamo messo delle palline di due colori diversi. Ma non vi diciamo di che colori sono. *(Mettiamo 7 palline nere e 3 rosse.)* In tutto le palline sono 10. Che probabilità ci sono che io peschi una pallina bianca? Provate con il probabilometro. Adesso facciamo 10 estrazioni e dopo riproviamo a usare il probabilometro: quante probabilità ci sono che alla prossima estrazione io peschi una pallina bianca? Perché non avete/avete messo nessuna/poche/una pallina? Quante probabilità ci sono che io peschi una pallina rossa? Usate il probabilometro. Quante probabilità ci sono che io peschi una pallina nera? È più facile rispondere dopo le 10 estrazioni o prima? Perché?

Certe volte, quando non abbiamo o non possiamo avere tutte le informazioni, se ripetiamo più volte le prove (le estrazioni nel nostro caso), vediamo quali sono gli eventi che si verificano con maggiore frequenza (cioè che accadono più spesso). È ragionevole supporre (pensare) che, per esempio, se su 10 estrazioni la pallina nera è uscita 8 volte, la pallina rossa 2 e la pallina bianca non è mai uscita, ci siano tante palline nere, poche palline rosse e nessuna pallina bianca (perché so che ci sono palline di due colori soli). Allora quando vi chiedo "Quante probabilità ci sono che esca una pallina nera?", voi dovete mettere tante o poche palline sul probabilometro? E se vi chiedo "Quante probabilità ci sono che esca una pallina rossa?", dovete mettere tante o poche palline sul probabilometro?

Postazione n° 2

La probabilità incontra la combinatoria

Giochi con dadi diversi (colorati, da 4, da 6, da 8 facce, ecc.), osservazioni e ricerca sistematica dei casi possibili, costruzione dello "spazio degli eventi". Rappresentazione sul reticolo cartesiano delle combinazioni con due e tre dadi (da 4, da 6, da 8, …).

Testi prodotti dai bambini e usati come traccia alla manifestazione:
Il reticolo cartesiano è una specie di tabella che noi abbiamo usato per rappresentare gli incroci con i dadi. Per costruire questa tabella bisogna disegnare tante linee orizzontali e tante verticali quante sono le facce dei dadi. Noi siamo riusciti a costruirla anche con delle cannucce colorate e dei pezzi di "nettapipa" per unirle. La tabella è utile per visualizzare gli incroci, che si possono chiamare anche nodi, che corrispondono alle combinazioni possibili con i dadi scelti. Quindi per calcolare quante sono tutte le combinazioni possibili con due dadi basta contare quanti sono gli incroci. Guardando bene ci si accorge che questa tabella non è altro che uno "schieramento", perciò, senza contare ogni volta gli incroci, basta fare una moltiplicazione: bisogna moltiplicare il numero delle facce di un dado per il numero delle facce dell'altro dado.

Se invece vogliamo trovare le combinazioni possibili con tre dadi, abbiamo bisogno di un reticolo tridimensionale. Noi lo abbiamo costruito con lo stesso sistema del precedente. Anche qui, per trovare le combinazioni possibili, basta contare gli incroci oppure moltiplicare le facce di un dado per le facce del secondo dado e per le facce del terzo dado (es. 4 x 4 x 4 oppure 6 x 6 x 6).

Usando entrambi i piani è possibile anche individuare quali sono i numeri che formano le combinazioni: basta seguire le cannucce colorate fino a dove si incrociano.

Tutti i numeri hanno uguali possibilità?

Rappresentazione spontanea di semplici situazioni combinatorie. Ricerca e rappresentazione ordinata di tutte le combinazioni che danno origine a ogni numero (istogramma). Ricerca di una "formula" per stabilire quante siano le combinazioni possibili per ogni numero.

Testi prodotti dai bambini e usati come traccia alla manifestazione:
L'istogramma ha un andamento a "campana", ha una simmetria centrale, sono presenti alcune regolarità, il numero (o i numeri) centrale è sempre quello con il maggior numero di combinazioni, c'è la possibilità di una rappresentazione matematica ("formula") per "sapere subito" quante combinazioni ci sono in tutto (spazio degli eventi) e quante per ogni numero (casi favorevoli).

Postazione n° 3

Problemi celebri
"Incontro" con personaggi famosi e risoluzione di problemi celebri di probabilità e combinatoria (Dante, Galileo, Pascal, Fermat).

Postazione n° 4

Giochi, inventati dai bambini, di diversa difficoltà, nei quali la maggiore possibilità di vittoria è data dalla scelta del dado "migliore" con cui effettuare ogni singolo turno di lancio: "Colora la mongolfiera", "Pilù e le mele", "Dov'è l'entrata?", "Il tesoro degli Hobbit", "Tranello maledetto", "Quadratini a volontà!", "Sfida nella terra di mezzo".

Osservazioni

Durante la fase di preparazione, sono dovuta intervenire sulla composizione originale per formare gruppi il più possibile equilibrati per capacità. Molte idee, soprattutto sulla realizzazione materiale dei supporti e dei giochi, sono partite dai bambini. L'interesse e la motivazione per le attività di laboratorio sono rimaste costanti per tutto l'anno, coinvolgendo anche bambini di solito non particolarmente attratti dalla matematica.

Durante la manifestazione, non ho assegnato postazioni fisse e i bambini hanno provato diversi ruoli. Alcuni hanno trovato facile relazionarsi con gli adulti (insegnanti, studenti universitari, …). Tutti concordano che è più facile "spiegare ai bambini piccoli", perché sono più disponibili ad ascoltare, e si sono dichiarati molto contenti dell'esperienza e pronti a ripeterla. All'esame orale di fine anno (quinta) gli alunni hanno dimostrato complessivamente buone capacità espositive e argomentative in tutte le discipline.

NOTE

* Scuola Elementare "F.lli Visintini",
via Forti, 15, I-34100 Trieste
e-mail: evaon@tiscalinet.it

BIBLIOGRAFIA

BARBANERA A., DE LUCA L., 1991, *Progetto Pitagora – La nuova educazione matematica per la scuola elementare*, Giunti Lisciani, Firenze.

BARUK S., 1998, *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna.

FORESTI I., 2003, "Probabilmente: giochiamo? Esperienze di probabilità con bambini della Scuola dell'Infanzia", in D'AMORE B., SBARAGLI S. (a cura di), 2003, *La didattica della matematica in aula. Atti del Convegno "Incontri con la Matematica"*, n. 17, Castel S. Pietro Terme, novembre 2003.

GLAYMANN M., VARGA T., 1979, *La probabilità nella scuola dell'obbligo – Educare alla coerenza*, Armando, Roma.

PERELLI D'ARGENZIO M.P., 1996, "Probabilità nella scuola elementare: analisi di proposte didattiche", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 19 (2), pp. 133-152.

VALENTI E., 1987, *La matematica nella nuova scuola elementare*, Le Monnier, Firenze.

ZUCCHERI L., 1979, "Le prime nozioni di calcolo delle probabilità per la scuola media inferiore", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 2, pp. 27-49.

ZUCCHERI L., 1989, "Alcune considerazioni sull'insegnamento del calcolo delle probabilità nella scuola media inferiore", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 12 (4), pp. 489-494.

I cristalli: qualcosa di... "naturalmente" matematico

Nadia Gasparinetti*

Presentazione

Era la prima volta che partecipavo a "La matematica dei ragazzi" e ho voluto lavorare sul tranquillo, su qualcosa di conosciuto. Così l'idea nasce dal lavoro dello scorso anno sulle simmetrie: avevo trattato i cristalli con la terza, e ho ripreso il lavoro con la terza attuale. Il filo conduttore erano i cristalli e l'esame delle loro caratteristiche fisiche e chimiche, lette con occhio matematico. C'era parecchio materiale e il tutto piaceva molto ai ragazzi. Si potevano eseguire esperimenti e il tema si prestava anche a divagazioni piacevoli e più semplici da trattare anche da parte di alunni con difficoltà, come le pietre preziose, e si poteva parlare di cose più impegnative, come la simmetria. Si è trattato quindi di un percorso basato sulla chimica, ma con aspetti matematici: il calcolo dei volumi, la media aritmetica, le superfici e altro ancora. Il titolo è frutto delle idee della classe.

Ho scelto la terza per vari motivi: è stata per tutto il triennio una classe difficile dal punto di vista comportamentale e quindi bisognosa di lavori che impegnassero i ragazzi in attività pratiche, ma anche una classe con alunni di buone capacità. Lo scorso anno, poi, gli alunni hanno partecipato a un lavoro di matematica "in parallelo" con la classe seconda della sezione che ha presentato un suo laboratorio alla manifestazione (attualmente, classe III C della Sc. Media "Divisione Julia"): si dividevano le classi in due gruppi, che venivano mescolati, e ciascuno lavorava con un'insegnante. Inoltre, la nostra scuola è impegnata dal

1996 nel progetto *Comenius 1* e il lavoro della manifestazione ben si prestava a essere inserito nelle attività. Alla fine, il tema dei cristalli è entrato anche nel compito d'esame di licenza.

Lavoro di preparazione

Ho introdotto l'argomento trattando del motore interno della Terra, dei vulcani e delle rocce ignee: spiegando la differenza tra effusive e intrusive, si parla di cristallizzazione.

Sono partita dall'osservazione diretta di alcuni campioni e ho dato la consegna di ricercare qualche definizione di cristallo che fosse appropriata a ciò che i ragazzi vedevano. Poi mi sono servita delle definizioni e spiegazioni ricavate dal sito web *www.comune.pisa.it/gruppogeomineralogico/cristalli.htm*, che mi sono sembrate di facile comprensione, e del sito: *www.csmtbo.mi.cnr.it/dcssi/Macchi/lectures__SC/cristalli.htm*, che suggeriva un percorso di osservazioni.

A questo punto si poteva iniziare. Dopo varie discussioni tra i ragazzi, che ho tentato di mediare, spesso senza risultati apprezzabili, la classe si è divisa autonomamente in 5 gruppi, ognuno con un lavoro ben preciso da presentare; in realtà tale prassi era ormai acquisita dai ragazzi, perché abituale nelle ore di compresenza, soprattutto con l'insegnante di tecnologia.

Ecco la suddivisione degli argomenti tra i gruppi:

1) cristallizzazione - densità
2) la simmetria nei cristalli
3) le pietre preziose
4) strutture e modelli di cristalli
5) il fullerene e i nanotubi.

Gli alunni avevano previsto un'esperienza di analisi alla fiamma, per evidenziare la presenza di determinati elementi nei minerali; tale prova suscita sempre l'interesse dei ragazzi, anche per l'innegabile impatto visivo. Però, nelle riunioni del Nucleo, si è pensato che l'esperimento potesse presentare un pericolo: durante le visite di scolaresche alla manifestazione ci sono dei momenti di affollamento davanti ai banchi degli esperimenti e non è certo consigliabile tenere accesa la fiamma di un fornello a gas.

Il lavoro è andato avanti per tutto l'anno, fino al mese di maggio. Abbiamo dedicato una o due ore al mercoledì; grazie alle ore di 52 minuti e al conseguente recupero obbligatorio, posso disporre in orario di 7 lezioni settimanali invece delle 6 curricolari, per ogni classe della sezione.

Per quel che riguarda i materiali, abbiamo utilizzato tutto ciò che era disponibile nel laboratorio della scuola, nella biblioteca, in siti Internet, in riviste specializzate, anche di proprietà dei ragazzi. Sono state utilizzate anche delle schede fornite dall'ITI "Malignani" di Udine.

1° GRUPPO: LA CRISTALLIZZAZIONE

Il gruppo ha presentato due esperimenti: il calcolo della densità di un minerale e la cristallizzazione vera e propria.

MISURA DELLA DENSITÀ DI UN MINERALE QUALSIASI

Materiale occorrente: bilancia, cilindro graduato, due o tre campioni di minerali, acqua. Scheda – guida dell'esperienza [ITI "Malignani" – Udine].
Esecuzione: si pesa il campione di minerale per alcune volte e poi si determina il suo peso come media dei valori ottenuti. Questa è una pratica usuale nei laboratori quando si devono determinare dei valori, generalmente pesate o misure di lunghezza. È una occasione per trattare il problema degli errori. A livello di terza media è sufficiente citare i tipi di errori, sistematici e accidentali. Per la determinazione del volume, ovviamente, non si possono usare le formule che i ragazzi hanno appreso, in quanto la forma del campione non si riconosce in alcuna delle figure solide studiate. Si determina perciò il volume immergendo il campione in un cilindro graduato che contiene un volume dato di acqua; si rileva poi il nuovo livello raggiunto dall'acqua. La differenza è il volume del campione. Anche in questo caso si effettuano più d'una prova e si calcola la media dei valori. Per il calcolo della densità, si applica la formula $d = m/V$. Le unità di misura sono g e cm^3.

LA CRISTALLIZZAZIONE

Gli alunni impegnati nell'esperimento hanno iniziato con un po' di storia: nel 1847 Arcangelo Scacchi realizzò nella sua casa un vero e proprio laboratorio per studiare la formazione di cristalli da soluzioni. Nel 1862 ne scelse un centinaio dalla sua raccolta e li inviò all'Esposizione Universale di Londra, dove furono premiati con una medaglia di bronzo, e poi a Parigi. Egli donò in seguito la sua raccolta di quasi 200 esemplari al Museo Mineralogico dell'Università di Napoli. Attualmente la raccolta consta di circa 300 esemplari: forme perfette per i composti di rame e zinco, colorati dall'azzurro al verde; il nitrato di sodio cristallizza in romboedri incolori che presentano le "spirali di crescita". Vogliamo imitare lo scienziato?
Materiale occorrente: solfato di rame e/o allume di rocca, acqua, un bunsen, una reticella spargifiamma, un becher, un filo e un pezzetto di legno o una matita o penna.
Esecuzione: si scioglie nell'acqua il sale, scaldando la soluzione fino ad ottenere una soluzione satura (quando si forma un corpo di fondo); si lascia riposare mettendo nella soluzione un filo sorretto da un pezzetto di legno o una penna (servirà da "madre" per la formazione dei cristalli). Il solfato di rame dà dei bellissimi cristalli blu; l'allume di rocca forma cristalli bianchi. In realtà, giocando sulle condizioni di cristallizzazione (temperatura, pressione, bassa velocità di raffreddamento), si hanno risultati diversi: con lento raffreddamento si hanno

cristalli di grandi dimensioni; con raffreddamento veloce, invece, si hanno numerosi cristalli di piccole dimensioni. Con mia grande sorpresa e soddisfazione, i ragazzi hanno osservato da soli queste differenze e mi hanno chiesto spiegazioni, così ho illustrato loro come le diverse condizioni di temperatura e pressione possano influenzare anche la formazione delle rocce.

2° GRUPPO: LA SIMMETRIA NEI CRISTALLI

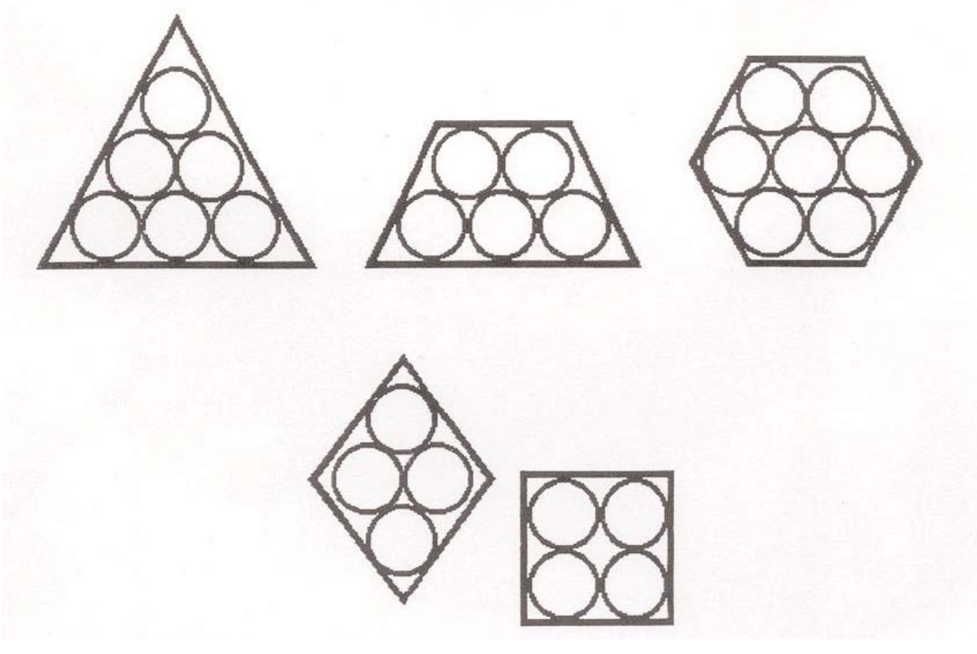
Ho ripreso con tutta la classe alcune nozioni sulle simmetrie, già studiate in geometria e in educazione tecnica: il piano di simmetria, l'asse e il centro, applicandole ai solidi. Abbiamo analizzato il cubo, il parallelepipedo rettangolo e una bipiramide a base rettangolare, perché queste figure sono esempi molto comuni di cristallizzazione nei minerali. A questo punto i ragazzi hanno cercato sui testi esempi di cristalli che avessero queste forme. Per ognuno di questi solidi il gruppo ha analizzato il numero di assi di simmetria, di piani e centri. Ho concluso il discorso delle simmetrie nei solidi con il concetto di "grado di simmetria", cioè la somma degli elementi di simmetria che un solido ha. Così, ad esempio, il cubo ha grado di simmetria 23 (ha 9 piani, 13 assi e 1 centro di simmetria). Non ho ritenuto necessario continuare ulteriormente lo studio con la classificazione delle forme cristalline, perché la ritenevo un po' complicata per loro. A questo punto, utilizzando le figure riportate nel testo *Chimica* di M. Rippa e con l'aiuto della collega di educazione tecnica, i ragazzi del gruppo hanno costruito i modelli in cartoncino del cubo, del parallelepipedo rettangolo, della bipiramide tetragonale e di un prisma triclino, praticando dei fori per gli stuzzicadenti che dovevano rappresentare l'asse di simmetria rotazionale. Hanno anche preparato un foglio con alcuni esempi di simmetria nei solidi in versione francese e inglese (la classe è nella sezione sperimentale con doppia lingua straniera). Con questi modelli spiegavano ai visitatori quanto appreso sulla simmetria e mostravano anche alcune immagini di cristalli nei quali si riconoscevano le forme studiate. Inoltre si sono esibiti nella stesura di un questionario di loro invenzione con domande sulla simmetria: lo somministravano ai visitatori alla fine della presentazione, come autovalutazione su quanto appreso.

3° GRUPPO: LE PIETRE PREZIOSE

Qui sono state soprattutto le ragazze a occuparsi dell'argomento. Il problema era che alcune di loro erano dotate di buone capacità e quindi mi sembravano sprecate per l'argomento; così ho operato un mescolamento dei gruppi ad attività iniziate. Il gruppo si è occupato del tipo di taglio delle pietre preziose: per le pietre opache o semiopache si usa il taglio "a *cabochon*", cioè a superficie curva semplice o doppia (piana nella parte inferiore e curva in quella superiore – curva in entrambe); il diamante ha proporzioni fisse, normalmente a 58 facce; esiste ora un nuovo taglio a 66 facce, che gli alunni non hanno avuto difficoltà a trovare perché pubblicizzato a sufficienza su varie riviste. L'unità di misura per i diamanti è il carato, corrispondente alla quinta parte del grammo, cioè 200 mg. La composizione chimica delle pietre viene stabilita dall'analisi chimica: ci sono pietre formate da sostanze semplici (elementi) o composte (composti chimici, leghe). Ho fatto sviluppare ai ragazzi il concetto di polimorfismo, in cui a composizione chimica uguale corrisponde una struttura diversa (da qui si va al fullerene, vedi 5° gruppo). Il gruppo ha utilizzato una pubblicazione sulle pietre preziose con schede (*Il magico mondo di minerali e gemme*, ed. De Agostini).

4° GRUPPO: STRUTTURE E MODELLI DI CRISTALLI

Gli alunni hanno iniziato l'esposizione proponendo un quesito: se devo pavimentare una stanza con piastrelle di uguale forma e dimensioni, che forma geometrica devono avere le piastrelle? E hanno fatto vedere varie possibilità sul cartellone, chiedendo poi perché si debba escludere qualche forma e anche se sia possibile ricavare una regola generale che escluda determinate forme (pentagono, ottagono): infatti per gradi e con vari ragionamenti si arriva alla conclusione che le piastrelle che permettono una pavimentazione uniforme sono poligoni regolari, i cui angoli interni sono sottomultipli di 360°. Sono poi passati alla teoria di Hooke (1665), secondo la quale la forma dei cristalli è in relazione al modo di "impacchettarsi" di sfere o globuli. Hooke osservò al microscopio dei cristalli e suggerì l'ipotesi che si potessero riprodurre le loro forme macroscopiche riproponendo all'infinito alcune combinazioni di "globuli" o sfere.



Dalle forme osservate al microscopio (triangolo, trapezio, esagono regolare, rombo, quadrato), si è passati quindi all'ipotesi di impacchettamento per giustificare la forma (vedi Figura).

Seguiva poi una dimostrazione pratica: usando sfere di cellulosa colorate e/o bianche, i visitatori erano invitati a riprodurre le varie forme. Si divertivano soprattutto le classi delle elementari. Il gruppo continuava parlando dei solidi platonici, che riproponeva anche sotto forma di esercizio, facendoli costruire con cartoncino colorato; alla preparazione di questa fase del lavoro ha collaborato l'insegnante di educazione tecnica. Il lavoro è stato utile per comprendere gli sviluppi piani della superficie dei solidi.

5° GRUPPO: FULLERENE E NANOTUBI

Il gruppo che si è occupato dell'argomento era formato da alunni con poche motivazioni e scarsa preparazione. L'unico appiglio che ho trovato (ma è servito!) è stata la passione di uno del gruppo per il gioco del… calcio! Il perché lo saprete tra poco. Inoltre l'argomento toccava temi di scienze studiati durante l'anno, come la nascita di una stella e la corrente. Il gruppo presentava un cartellone con la storia della molecola e qualche notizia sui nanotubi che riassumo qui sotto; poi un'immagine e due modelli fatti dai ragazzi con sfere di plastica, che rappresentavano la struttura del diamante e della grafite. E portavano anche il pallone da calcio.

Un po' di storia. Fino al 1985 si conoscevano solo due forme allotropiche del carbonio: il diamante e la grafite. La struttura del primo è quella del tetraedro, mentre la grafite è formata da piani nei quali gli atomi di carbonio sono legati a formare degli esagoni. Poi Harold Kroto scoprì in laboratorio la terza forma e le diede il nome di "fullerene", da Fuller, famoso architetto che costruiva negli anni '50 del Novecento cupole simili alla struttura della molecola: una specie di gabbia cava simile a un pallone da calcio, formato da 60 atomi di carbonio uniti in 12 pentagoni e 20 esagoni. La scoperta avvenne mentre Kroto studiava la materia interstellare tentando di riprodurre in laboratorio le condizioni "stellari" del carbonio (vaporizzò la grafite colpendola con fasci laser). Kroto amava dire: «*Siamo tutti polvere di stelle*», fatti del materiale pompato fuori dall'atmosfera delle giganti rosse e che viaggia nello spazio. Dalla scoperta, che fruttò il Nobel allo scienziato, scaturì una vasta gamma di applicazioni, che riguardano i semiconduttori, i lubrificanti e persino nuovi farmaci. Nel 1991 si scoprirono i nanotubi, strutture che sono una forma diversa del fullerene, dalle straordinarie proprietà. Sono molto più leggeri dell'alluminio, resistono nel vuoto fino a 2.800°C, trasportano molta corrente (si stima un miliardo di ampere per cm^2), sono elastici. Possono essere preparati facilmente anche scaldando il metano in forni, fino a che si libera il carbonio, che si dispone da solo in forma di nanotubi. In medicina sono utili per le loro piccole dimensioni e la capacità di catturare altri atomi.

Possono perciò essere usati come vettori da iniettare nell'organismo per veicolare farmaci. Questa notizia fu trovata su un periodico di divulgazione scientifica da un alunno della classe che lavorava in un altro gruppo, ma che era molto interessato alle scienze.

Con questo lavoro il gruppo si è impegnato di più, acquisendo conoscenze su argomenti che hanno poi facilitato la conduzione del colloquio d'esame di licenza. Anche l'interesse dei visitatori per i modellini da loro costruiti ha migliorato l'autostima.

Osservazioni conclusive

Alla fine del lavoro di preparazione alcuni ragazzi dei vari gruppi hanno preparato un questionario di autovalutazione (previsto nel lavoro di Comenius), tradotto poi in inglese e francese. Gli insegnanti non vi hanno apportato alcun cambiamento. Osservando le risposte al questionario, ho notato una grande sincerità da parte dei ragazzi e una capacità di autovalutazione che spesso si sottovaluta; anche quando hanno elencato le difficoltà incontrate nel lavoro o nel relazionarsi, ho notato che queste coincidevano con le mie osservazioni. Sono emerse le difficoltà di alcuni relative allo stare insieme, il metodo di lavoro approssimativo dell'ultimo gruppo, l'essere un leader per altri. E, alla fine, anche le reali buone capacità del gruppo classe che, nonostante gli ostacoli incontrati nel triennio, noi insegnanti avevamo sempre percepito.

NOTE

* Istituto Comprensivo
"Divisione Julia", Viale XX
Settembre, 26, I-34125 Trieste
e-mail: fulerene@libero.it

BIBLIOGRAFIA

AA.VV., 1993, *Le Guide della De Agostini. Il magico mondo di minerali e gemme – Guida pratica per scoprirli e collezionarli*, De Agostini, Novara.

PASSANNANTI S., PONENTE S., 1995, *Corso di chimica con esperienze di laboratorio, e schede relative*, Tramontana, Milano.

RIPPA M., 1979, *Cenni di mineralogia*, allegato al testo *Chimica* dello stesso autore, Zanichelli, Bologna.

SITI WEB

www.comune.pisa.it/gruppogeo-mineralogico/cristalli.htm

www.csmtbo.mi.cnr.it/dcssi/Macchi/lectures_SC/cristalli.htm

http://kidslink.bo.cnr.it/silvani/simmetrie/geom/lezione.htm

Si ringrazia la prof.ssa Michela Morelli dell'I.T.I.S. "Malignani" di Udine, che ha gentilmente fornito le schede delle esperienze di laboratorio.

Segreti, codici e spie

Jadranka Santi*

Introduzione

Il Liceo Pedagogico ha il compito di iniziare a formare i futuri insegnanti di scuola primaria, fornendo agli allievi una vasta cultura nei campi delle scienze dell'educazione, della didattica e della pedagogia. Alle lezioni teoriche vengono sempre affiancate anche lezioni pratiche, in cui i ragazzi, attraverso la preparazione di unità didattiche ed il tirocinio in classe, hanno la possibilità di applicare le conoscenze acquisite.

Partendo da questo presupposto, ho, in primo luogo, proposto agli studenti di seconda, con cui ho deciso di partecipare alla VI edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi", l'analisi di un lavoro svolto in precedenza da alcuni membri del Nucleo di Ricerca Didattica (cfr. Zuccheri, 1992; Sgarro & Zuccheri, 1992; Marceddu, 2002) al fine di familiarizzarli con una situazione concreta di insegnamento della matematica attraverso la crittografia nella scuola dell'obbligo. La mia scelta è ricaduta sulla seconda classe poiché insegnavo loro matematica e fisica per il secondo anno di seguito e quindi li conoscevo bene. Gli studenti di questa classe, per di più, erano attratti dalla crittografia, che avevano "scoperto" nel momento in cui una delle ragazze aveva iniziato a scarabocchiare sul banco messaggi segreti usando un codice trovato su una rivista.

Dopo aver appreso che la crittografia può essere utilizzata nell'insegnamento della matematica a vari livelli, con diversi obiettivi e finalità, siamo passati all'approfondimento del mondo affascinante dei codici segreti, scoprendo, oltre al cifrario a rotazione o di Cesare, anche quello a sostituzione completa. Studiando quest'ultimo, abbiamo svolto osservazioni sperimentali sulla struttura statistica dell'italiano, dello sloveno e dell'inglese scritti e abbiamo costruito degli istogrammi delle frequenze delle lettere nelle tre lingue, confrontando alla fine le statistiche ottenute con quelle riportate dai testi. Abbiamo infine sfruttato quanto avevamo imparato per risolvere alcuni schemi di parole crociate crittografate della *Settimana Enigmistica*.

In un secondo momento, i ragazzi sono stati lasciati allo sbaraglio nel decidere come presentare quanto appreso alla manifestazione.

Dopo un primo momento di incertezza, gli studenti hanno deciso di presentare quanto da loro acquisito in due laboratori distinti, l'uno rivolto ai bambini delle scuole elementari e l'altro ai ragazzi delle medie inferiori. Nel primo hanno presentato il cifrario a rotazione, illustrando il momento storico della sua nascita e facendo lavorare i bambini su esempi concreti di cifrazione e decifrazione. Nel secondo, invece, hanno proposto il cifrario a sostituzione completa, presentando il quadro storico in cui esso nacque e gli istogrammi delle frequenze delle lettere in sloveno, italiano e inglese. Alla fine di questo laboratorio i ragazzi hanno presentato la soluzione di un crittogramma tratto dalla *Settimana Enigmistica*, cercando di coinvolgere il più possibile il pubblico.

A differenza della maggior parte degli altri laboratori presenti alla manifestazione, che erano organizzati per postazioni, i ragazzi della mia classe, essendo solamente in cinque, hanno deciso di esporre gli argomenti in modo frontale, presentandoli a turno. Ciò ha richiesto loro un notevole sforzo, poiché dovevano essere in grado di sostenere un discorso per ben venti minuti. In ogni caso, tutti erano preparati a presentare entrambi i laboratori, sia in italiano sia in sloveno.

Bisogna infine notare che i ragazzi hanno lavorato con molto entusiasmo, rimanendo spesso a scuola anche in orario extracurricolare. Infatti, la costruzione dei cartelloni, tutti bilingui, ha richiesto parecchie ore di lavoro.

Il cifrario di Cesare

Attraverso la *cifratura* si vuole trascrivere un testo in modo che questo risulti leggibile solamente alla persona cui è rivolto.

La *crittologia*, scienza che studia le scritture segrete, è composta da due rami: la *crittografia* studia i diversi modi di cifrare un messaggio, mentre la *crittoanalisi* si occupa del contrario, ossia di come decifrare un messaggio di cui non conosciamo la chiave, di come cioè "rompere" la chiave del messaggio.

Entrambi i rami hanno, da tempi remoti, un ruolo fondamentale sul piano diplomatico e politico. Gli inizi dell'uso della crittografia risalgono a prima dell'era cristiana. Nei secoli si sono sviluppati innumerevoli modi per occultare un messaggio. L'intercettazione della posta diplomatica era una pratica comune, non solamente in tempo di guerra. Nelle corti esistevano le cosiddette "stanze nere", in cui si tentava di risolvere i messaggi trascritti o intercettati.

Uno dei casi storici più famosi risale al 1589, quando, durante la guerra franco-spagnola, il matematico francese Vieté, su ordine del re, riuscì a trovare la chiave della scrittura segreta usata dagli Spagnoli nei loro piani di guerra. La scrittura era, per l'epoca, così complicata che gli Spagnoli si sentivano totalmente al sicuro. Oggi la sua analisi, grazie all'uso del computer, probabilmente non sarebbe un osso troppo duro. All'epoca, però, lasciò talmente sbigottiti gli Spagnoli che essi si lamentarono con il Papa per i presunti poteri magici usati dai Francesi durante la guerra.

Nell'era dei computer la crittografia ha un ruolo sempre maggiore per l'importanza che risulta avere la conservazione di dati personali e d'affari. La crittografia viene spesso utilizzata anche nei giochi d'azzardo, per evitare imbrogli con falsi.

I crittogrammi più semplici sono basati sulle permutazioni delle lettere della lingua in cui sono scritti. Questo vuol dire che si scambia, attraverso una regola ben precisa, ogni singola lettera dell'alfabeto con un'altra lettera definita. Un metodo di questo tipo venne impiegato da Giulio Cesare. I suoi messaggi erano cifrati in modo che ogni singola lettera fosse sostituita da quella che la segue di tre posizioni nell'alfabeto e le ultime tre lettere dell'alfabeto con le prime tre, scritte nel loro ordine usuale. Nell'alfabeto italiano esteso, il cifrario di Cesare può essere rappresentato mediante la tabella seguente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Come esempio di utilizzo di tale cifrario, consideriamo la seguente trascrizione:

– messaggio in chiaro: COSÌ CIFRAVA CESARE

– messaggio trascritto in cifra: FRVLFLIUDYDFHVDUH

Nella trascrizione, abbiamo volutamente omesso gli spazi tra le parole, in modo che un potenziale intercettatore avesse maggiore difficoltà nella decrittazione del messaggio. Con ciò, abbiamo presupposto che la frase COSÌ CIFRAVA CESARE fosse abbastanza familiare al destinatario, che avrebbe aggiunto gli spazi senza alcuna difficoltà.

Tre, ovviamente, non è un numero magico. Le lettere dell'alfabeto si possono traslare, generalizzando il metodo usato da Cesare, per un numero qualunque di posti. I cambiamenti significativi si ottengono però per traslazioni (di almeno 1 posto e) di meno di 26 posti.

La procedura può venir descritta anche con una formula matematica, se sostituiamo, ad esempio, le lettere dell'alfabeto con i numeri che indicano la loro posizione alfabetica. La chiave è il complesso di informazioni che serve per decifrare un messaggio. In questo caso, noto tutto il contesto, si può dire che la chiave per decifrare una tale scrittura è un numero d tale che $0 \leq d \leq 25$. Infatti, la trasformata di una qualunque lettera di posto n è quella di posto $n + d$. Bisogna però ricorrere all'addizione modulo 26, quindi risulta più pratico servirsi di uno strumento, il cifrario a rotazione, che verrà descritto di seguito.

Questo tipo di cifratura, anche nel caso di d qualsiasi, viene denominato cifratura di Cesare ed è molto semplice da utilizzare, ma anche da "forzare". Se la chiave *d* viene cambiata molto spesso, il metodo diventa più sicuro. Abbiamo però in questo caso la difficoltà di far recapitare più volte la chiave al destinatario. Se l'intercettatore capisce che stiamo usando la cifratura di Cesare, non gli resta che provare tutte le 26 possibili chiavi per decifrare il messaggio. Con molta probabilità ci sarà solamente una chiave che produrrà un messaggio in chiaro che abbia senso.

Il problema maggiore è costituito dallo spiegare i concetti appena esposti ai bambini delle scuole elementari. Per fare ciò, abbiamo in primo luogo costruito un cifrario a rotazione (cfr. Figura 1), costituito da due dischi sovrapposti, l'uno più grande e l'altro più piccolo. Il disco maggiore è fisso, quello minore è libero di ruotare.

I due dischi sono stati divisi in 26 spicchi. Sul disco maggiore abbiamo scritto le lettere dell'alfabeto italiano esteso, sul disco più piccolo l'alfabeto per cifrare i messaggi. Nel nostro caso abbiamo scelto un alfabeto costituito da simboli di nostra invenzione, ma ritenuti familiari per i bambini. In questo modo a ogni lettera si associa un simbolo e il simbolo che sta sotto alla lettera A costituisce la *chiave* del messaggio segreto. Nei lavori in precedenza svolti dai componenti del Nucleo di Ricerca Didattica (cfr. Zuccheri, 1992) le lettere venivano codificate mediante numeri, anche perché questo stratagemma portava alle applicazioni nel campo dell'aritmetica modulare, ma ai ragazzi della mia classe pareva più simpatico farlo con i simboli e, in questo caso, non si pensava di arrivare a trattare tale argomento.

Una volta costruita la ruota, si è cercato il modo più appropriato per comunicare con i bambini. I ragazzi hanno constatato che i bambini sono di solito attratti dalle favole e che quindi il modo migliore sarebbe stato quello di inventarsi una favola, come la seguente:

> "Una volta in un paese molto lontano viveva una principessa bellissima, estremamente intelligente e coraggiosa. Un giorno sfortunato la principessa venne rapita da

un mago cattivo che la rinchiuse in una cella in cima alla sua torre. Il mago però non sapeva che la principessa comunicava con un principe attraverso dei messaggi segreti. La principessa e il principe usavano, per scambiarsi messaggi, il cifrario di Cesare. Ognuno di loro era in possesso del disco cifrante e conosceva la chiave per decifrare i messaggi. Il disco era in realtà costituito da due dischi sovrapposti, uno più grande e uno più piccolo, che si muoveva rispetto al disco più grande. Sul disco esterno c'erano le lettere della lingua in cui si scriveva il messaggio e su quello più piccolo i simboli per scrivere il messaggio segreto. Per comporre il messaggio segreto serviva anche una chiave, che è costituita dal simbolo posto sotto la lettera A. La nostra principessa scelse ♡.
Una volta posto il simbolo stabilito sotto la lettera A, si doveva sostituire ogni lettera del messaggio con il simbolo che compare sotto la lettera sul disco piccolo. Il suo messaggio, scritto in italiano, era: SOS SONO PRIGIONIERA e, cifrato

La principessa consegnò il messaggio a un piccione viaggiatore, ma il mago, che la stava controllando, riuscì a intercettarlo. Lui, però, non essendo in possesso della chiave per decifrare il messaggio, dovette procedere per tentativi. Prima provò A = ☾ e ottenne: VRV VRQR SULJLRQLHUD.

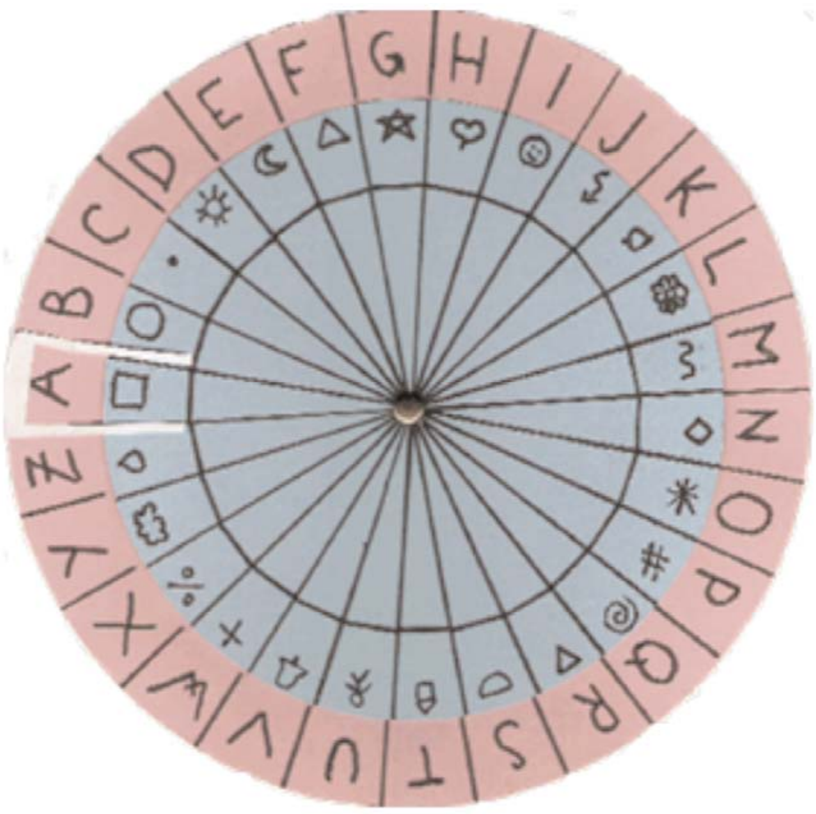


Figure 1 e 2
Cifrario di Cesare

> La nostra storia però non finisce qui… La principessa, rendendosi conto della possibilità che il mago intercettasse il messaggio, ne inviò subito un secondo, che il mago, essendo occupato con la decifrazione del primo, non riuscì a captare. Così il principe poté venire a salvarla.

Durante lo svolgimento del meeting "La matematica dei ragazzi", quindi, la visita di ogni classe al nostro laboratorio iniziava con questo racconto. Nel corso della narrazione, i ragazzi facevano attenzione a interagire il più possibile con i bambini. Di solito, poi, continuavano facendo riflettere i visitatori sul numero di chiavi possibili per la decifrazione dei messaggi. I bambini di scuola primaria, la maggior parte delle volte, dopo aver contato i simboli della ruota, rispondevano che c'erano 26 chiavi possibili. Poi si passava alla parte pratica: si prendeva un volontario che scrivesse una frase alla lavagna, si faceva scegliere a turno la chiave e trascrivere la frase cifrata con i simboli.

Come si è avuto modo di osservare nel corso del meeting, anche i bambini molto piccoli si rendono conto che scrivere messaggi con il cifrario di Cesare non è molto sicuro, proprio perché ci sono solo 26 modi possibili per scegliere la chiave.

Il passo successivo perciò consiste nel prendere in considerazione, invece che una traslazione dell'alfabeto, il caso in cui le lettere possono venir permutate in modo arbitrario. In questo caso la chiave è composta da una tabella che associa a ogni singola lettera in codice la lettera in chiaro.

Le chiavi possibili sono tantissime: nel caso dell'alfabeto italiano esteso sono ben 26!, cioè $26 \times 25 \times 24 \times \ldots \times 2 \times 1$. Questo metodo può venire, però, facilmente forzato con il metodo dell'analisi statistica delle frequenze delle lettere.

La tabella seguente ci mostra le frequenze relative (in percentuale) delle lettere nella lingua italiana, trovate dai ragazzi della mia classe esaminando un articolo di circa 1.000 lettere tratto dal *Corriere della Sera*:

E	A	I	O	R	N	L	T	S	D	C	U	M
12,3	11,8	10,8	7,9	7,4	7,3	7,0	6,6	5,5	3,8	3,7	2,9	2,6

P	G	V	F	Z	B	H	Q	Y	K	J	X	W
2,3	1,9	1,6	1,1	1,0	0,8	0,6	0,4	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0

Analogamente, per lo sloveno è stata ottenuta la seguente tabella:

E	A	I	O	N	R	S	L	J	T	V	D	K
10,8	10,2	8,9	8,8	6,9	5,3	5,2	4,7	4,5	4,5	4,0	3,6	3,5

M	P	U	Z	B	G	Č	H	Š	C	Ž	F
3,3	3,1	2,2	2,1	1,8	1,5	1,5	1,1	1,0	0,7	0,7	0,1

Bisogna comunque dire che i testi, specialmente quelli brevi, non rispecchiano del tutto le statistiche e che quindi è meglio prendere in considerazione anche la probabilità delle lettere di apparire alla fine delle parole oppure la probabilità che hanno di apparire in coppia, ecc. Un testo risulta essere tanto più semplice da decrittare quanto più è lungo, perché rispecchia meglio le proprietà statistiche della lingua in cui è scritto. Perciò i messaggi in codice devono essere brevi e la chiave deve venire cambiata spesso.

Coi ragazzi abbiamo deciso di spiegare il cifrario a sostituzione completa servendoci delle parole crociate crittografate della *Settimana Enigmistica*. I ragazzi si sono messi all'opera risolvendo vari enigmi. Il problema era però quello di trovarne uno in cui le frequenze relative delle lettere rispecchiassero quelle da noi ottenute. Ovviamente, essendo i crittogrammi composti da poche parole e, per lo più, non collegate in frasi dell'italiano scritto, ciò non accade spesso. Alla fine ci siamo soffermati sul quesito n. 5.402 che non era troppo complicato da risolvere, rispecchiava le nostre frequenze e non conteneva troppe parole "difficili". Il cruciverba (che conteneva le informazioni: 3 = *a*, 7 = *e*, 11 = *n* e 12 = *t*) è riportato in Figura 2.

Nel corso del laboratorio presentato al meeting "La matematica dei ragazzi", si chiedeva ai visitatori di contare quante volte apparissero i singoli numeri, ottenendo:

Numero	7	3	5	12	8	11	4	1	2	10	13	6	15	14	9
Frequenza	18	15	15	15	13	12	9	6	4	4	4	4	3	2	2
Lettera	e	a		t		n									

Questa tabella doveva essere confrontata con le tabelle delle frequenze da noi ottenute per la lingua italiana. Si poteva così ipotizzare che il numero 5 rappresentasse la *i* e l'8, spesso presente alla fine delle parole, la *o* (invito i lettori a provare a inserire le lettere nel cruciverba per seguire meglio quanto qui esposto). Così facendo si otteneva una parola completa, *tetano*, che confermava che si era sulla strada giusta.

La successiva lettera più frequente, secondo le nostre tabelle, era la *r*. Associando al numero 4 la lettera *r* si ottenevano due parole che hanno senso, cioè *rio* e *nere*, che confermavano che si era fatta una scelta corretta. A questo punto si poteva associare al numero 1 la *s* e ottenere, ad esempio, la parola *interessante*. Bisogna a questo punto notare che la *s* è una delle lettere che più frequentemente appaiono come doppie nelle parole italiane. Si scriveva poi la *v* al posto del numero 14 , ottenendo nella terza riga la parola *neve*. Osservando il crittogramma, già quasi completato, si vedeva che, inserendo la *p* al posto del 2, si ottenevano due parole complete: *panetterie* e *trapasso*. A questo punto, con un po' d'intuizione, si potevano inserire ancora le lettere mancanti: 6 = *d*, 9 = *c*, 13 = *l*, 15 = *b* e 10 = *m*.

Il problema maggiore di questa esposizione fu quello di trovare un modo per poter completare il crittogramma in modo chiaro nel minor tempo possibile. Per fare ciò erano stati costruiti due cartelloni: su uno erano esposte le tabelle con i dati statistici e sull'altro il crittogramma. Le lettere erano state scritte su dei post-it, così da poter essere posizionate al momento opportuno: il gioco era fatto.

	■	■	■	2	3 a	4	5	6	7 e	■	1	8
8	2	■	9	3 a	10	5	11 n	7 e	*12 t*	12 t	8	■
13	8	12 t	3 a	4	5	8	■	■	*11 n*	7 e	14	7 e
■	11 n	7 e	4	3 a	■	■	3 a	15	*3 a*	12 t	5	■
■	12 t	4	3 a	2	3 a	1	1	8	■	3 a	7 e	■
■	5	11 n	12 t	7 e	4	7 e	1	1	3 a	11 n	12 t	7 e
3 a	6	3 a	12 t	12 t	3 a	10	7 e	11 n	12 t	8	■	4
2	3 a	11 n	7 e	12 t	12 t	7 e	4	5	7 e	■	8	15
13	■	8	4	5	7 e	11 n	12 t	3 a	13	7 e	■	3 a
8	10	■	5	■	■	12 t	5	9	5	11 n	8	■
10	3 a	11 n	11 n	■	6	5	14	5	7 e	12 t	5	■
15	5	6	8	11 n	5	■	8	■	4	7 e	13	7 e

Figura 3

Parole crociate crittografate

I ragazzi hanno scoperto, attraverso la partecipazione a "La matematica dei ragazzi", che la matematica può essere anche divertente e che probabilmente avevano scelto la scuola giusta, poiché lavorare con i bambini li aveva affascinati parecchio.

Trasportati dall'entusiasmo, gli studenti hanno in seguito espresso il desiderio di presentare quanto da loro appreso anche ai bambini della Scuola Elementare con lingua d'insegnamento slovena Oton Zupančič, con sede nel medesimo edificio del Liceo Pedagogico.

Presi gli accordi con le maestre, siamo stati così ospiti della scuola elementare per ben due volte. In questi due incontri gli allievi hanno presentato quanto da loro esposto a "La matematica dei ragazzi", prima ai bambini della prima e della seconda classe, poi a quelli delle classi terza, quarta e quinta. Anche in queste due occasioni i ragazzi sono rimasti molto soddisfatti del lavoro svolto in classe con i bambini. Infatti gli allievi delle elementari sono risultati essere più motivati a scoprire concetti nuovi di quanto non lo siano stati gli studenti d'età più avanzata.

NOTE

* Liceo Pedagogico Statale con lingua d'insegnamento slovena "A. M. Slomšek", Via Caravaggio 4, I-34128 Trieste
e-mail: amslomsek@tiscalinet.it

BIBLIOGRAFIA

Marceddu M.C., 2002, "Il gioco dell'agente segreto", in Zuccheri L., Leder D., Scheriani C. (a cura di), 2002, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 1996-1998*, EUT, Trieste, pp. 43-49.

Sgarro A., 1986, *Crittografia*, Muzzio, Padova.

Sgarro A., 1989, *Codici segreti*, Mondadori, Milano.

Sgarro A., Zuccheri L., 1992, "I codici segreti nell'insegnamento della matematica", *Atti del Convegno "Media e metodi III: la matematica tra didattica e cultura"* (Trieste 6-7 maggio 1992), pp. 131-139.

Singh S., 1999, *Codici & Segreti*, Rizzoli, Milano.

Zuccheri L., 1992, "Crittografia e Statistica nella Scuola Elementare", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 15 (1), pp. 19-38.

Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi

Letizia Mucelli*

Introduzione

Tenendo conto anche delle più recenti indicazioni del Ministero della Pubblica Istruzione sulla centralità dell'insegnamento della matematica e soprattutto della geometria nelle scuole di ogni ordine e grado, e delle discussioni svoltesi in merito durante le riunioni del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Trieste, si è scelto di partecipare all'edizione 2004 della manifestazione "La matematica dei ragazzi" con un lavoro relativo ai cosiddetti cinque teoremi di Talete

1 – angoli opposti al vertice sono tra loro congruenti;
2 – in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti;
3 – ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto;
4 – ogni diametro divide il cerchio in due parti congruenti;
5 – metodo di Talete per misurare l'altezza di Piramide;

e intitolato "*Con bristol, luci e ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi*".

Sono stati così ripresi alcuni fondamentali concetti che si ritrovano nello studio della geometria euclidea. L'approccio alla geometria euclidea risulta spesso problematico e difficoltoso per i ragazzi, soprattutto perché essi non sono abituati a lavorare in modo rigoroso e ipotetico-deduttivo e mancano ancora (purtroppo sempre più spesso) dei supporti all'intuizione, che dovrebbero essere stati forniti dallo studio descrittivo della geometria nei cicli di istruzione precedenti.

Il lavoro affrontato in classe mira a passare gradualmente dall'intuizione a una dimostrazione rigorosa dei teoremi presi in considerazione, utilizzando giochi e modelli di cartoncino ideati e realizzati dagli stessi studenti, con lo scopo di rendere evidenti e riscoprire assieme proprietà geometriche già note agli antichi.

La sfida per i ragazzi, coinvolti in prima persona nello spirito della manifestazione, è quella di imparare a collaborare per acquisire competenze, proprietà di linguaggio e capacità di comunicazione adeguate a far comprendere anche ad altri i risultati raggiunti.

Non si trascura di dare una collocazione storica ai concetti, così da rendere evidente che le stesse difficoltà che incontrano gli studenti di oggi si ritrovano anche nell'evoluzione storica del pensiero e delle teorie matematiche (mal comune... mezzo gaudio!). Ciò aiuta a dare un "volto" e "un'anima" a percorsi che rimangono altrimenti puramente astratti.

La realizzazione dei modelli in cartoncino viene supportata dalla lettura in classe di frammenti storici relativi alla figura di Talete e di testi di divulgazione scientifica come "Talete l'uomo dell'ombra" (da *Il Teorema del Pappagallo*), dai quali si traggono nuove idee e spunti di riflessione (ad esempio, si discute sulla *portata universale* dei risultati enunciati nei teoremi, si cerca di creare *situazioni nuove* da affrontare utilizzando i concetti già acquisiti, dimostrando così di averli compresi fino in fondo e di non aver fissato nozioni in modo puramente mnemonico e improduttivo, si realizzano alcuni controesempi, che evidenzino invece situazioni in cui i concetti non sono applicabili...).

Il percorso viene inoltre documentato dai ragazzi mediante la realizzazione di cartelloni illustrativi, da utilizzare in sede di manifestazione come supporto per coinvolgere in modo il più possibile attivo e dinamico il "pubblico".

Di seguito si riporta una breve descrizione della classe con cui si è scelto di affrontare il lavoro (per la presentazione scritta dai ragazzi in merito all'attività di preparazione svolta, si rimanda alla parte iniziale del presente volume). Si procede quindi alla descrizione dei contenuti proposti in sede di manifestazione e si riportano alcune osservazioni e ripensamenti emersi.

Descrizione della classe

La classe con cui si è scelto di lavorare è una prima del Liceo Linguistico Europeo "P. d'Aquileia". Semplici test e quesiti proposti all'inizio dell'anno scolastico hanno evidenziato nei ragazzi una preparazione matematica di base alquanto disomogenea e differenziata a seconda della scuola secondaria inferiore di provenienza.

La classe è costituita da 20 ragazzi, di cui soltanto tre sono maschi; una ragazza e un ragazzo hanno frequentato scuole con lingua d'insegnamento slovena; un'altra ragazza proviene dall'Armenia e ha ancora notevoli difficoltà di comunicazione in lingua italiana.

Descrizione delle cinque postazioni

In questo paragrafo si procede alla descrizione dettagliata dei modelli e dei contenuti proposti dai ragazzi in ciascuna delle cinque postazioni realizzate, seguendo l'ordine di esposizione adottato in sede di manifestazione.

Postazione 1: metodo di Talete per misurare l'altezza della Piramide di Cheope

Per presentare tale metodo si è realizzato il modello riportato in Fig. 1: su una base di compensato è fissata un'asta verticale, sulla quale scorre una pallina da tennis che rappresenta il sole[1] che si alza e abbassa sull'orizzonte, variando così l'inclinazione dei propri raggi, di cui uno è simulato dal filo di lana che parte dalla pallina-sole e raggiunge il suolo passando per il vertice del modello di *piramide retta a base quadrata* realizzata in cartoncino bristol. Congiungendo con un pennarello il punto T, in cui il raggio tocca il suolo, con gli estremi del lato AB della base della piramide opposto a tale punto, si ottiene la traccia dell'ombra della piramide proiettata al suolo (vedi Fig. 2).

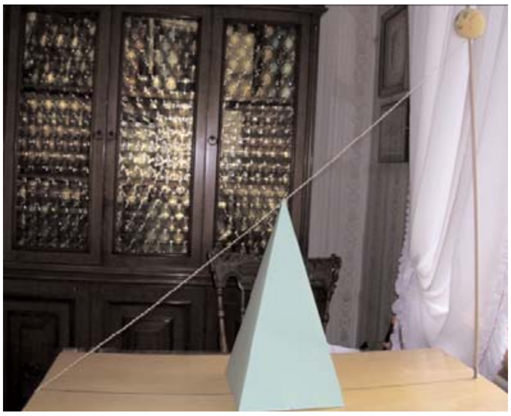


Figura 1

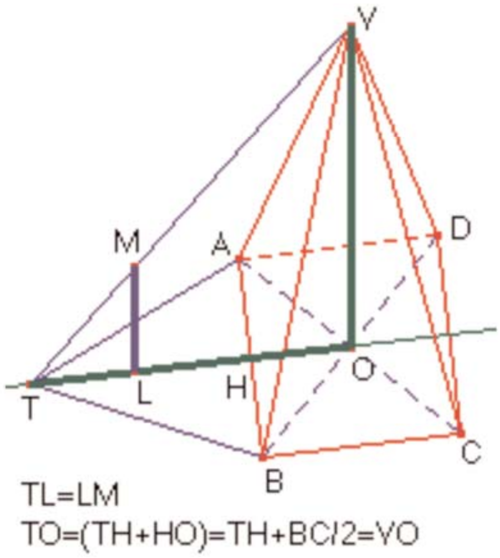


Figura 2

Si dispone il modello in modo da riprodurre la situazione probabilmente considerata da Talete, cioè si descrive il caso in cui i raggi di sole giungono al suolo (orizzontale) formando un angolo di 45° con esso e, nel caso qui considerato, appartengono a un piano perpendicolare al lato AB della piramide[2] (vedi Fig. 2). In tal caso, il triangolo rettangolo VTO è isoscele, con i lati VO e TO congruenti tra loro, quindi l'altezza della piramide uguaglia la lunghezza del segmento TO, somma del segmento TH, facilmente misurabile, e del segmento HO, che, nel caso del modello, è pari alla metà del lato del quadrato, essendo stata orientata la piramide in modo che OT sia perpendicolare ad AB. Si ricorda che Talete individuava tale situazione utilizzando un bastone: misurava la lunghezza dell'ombra della piramide nell'istante in cui la lunghezza di un bastone piantato al suolo uguagliava la lunghezza della propria ombra (in Fig. 2 il segmento-bastone ML è congruente alla propria ombra TL). Entra quindi in gioco il concetto di similitudine… Nell'illustrare il modello e la sua possibilità di utilizzo i ragazzi usano anche un modello di *piramide con una faccia aperta*, in cui è stato inserito uno spago, che congiunge il vertice della piramide con il centro della base: risulta così più agevole e di immediata comprensione, anche per i visitatori più piccoli, capire cosa sia da intendersi per altezza di una piramide.

Postazione 2: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti

Per presentare questo teorema di geometria euclidea (Teorema diretto del triangolo isoscele, ricordato anche come "*pons asinorum*"), i ragazzi hanno costruito un cartellone in cui, per completezza, è illustrata la classica dimostrazione del teorema. Tenendo conto che studenti loro coetanei o più grandi dovrebbero già conoscere tale dimostrazione, che risulterebbe invece di troppo difficile comprensione per bambini più piccoli, durante l'esposizione si preferisce far ricorso a modelli intuitivi per verificare l'enunciato del teorema esposto. Su un cartoncino viene disegnato un triangolo isoscele, e su di un altro cartoncino se ne disegna un secondo congruente al primo: si fa osservare che, anche "girando" il secondo triangolo ritagliato, gli angoli alla base continuano a coincidere con quelli del primo disegno sul cartoncino. Con un modello analogo al precedente, in cui si utilizza allo stesso modo un triangolo scaleno, si sottolinea l'importanza dell'ipotesi di questo teorema: se il triangolo non è isoscele, "girando" il triangolo ritagliato, gli angoli alla base non sono più congruenti a quelli del triangolo disegnato sul cartoncino!

Postazione 3: ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto

La dimostrazione del teorema, riproposta su un cartellone, viene condotta utilizzando le conoscenze che i ragazzi hanno a disposizione a questo punto dei loro studi. In riferimento alla Fig. 3, si osserva che, essendo AO, OC e OB raggi di una stessa circonferenza, i due triangoli AOC e COB sono entrambi isosceli. Quindi, per il Teorema diretto del triangolo isoscele, i rispettivi angoli alla base sono congruenti. Si ha perciò $y = 2a$ e $x = 2b$ per il Teorema dell'angolo esterno. Sommando membro a membro tali relazioni, si ha: $x + y = 2(a + b)$, ed essendo anche $x + y = 180°$ perché x ed y sono adiacenti, si ricava che $a + b = 90°$.

Per convincere i visitatori più piccini si costruisce invece un modello (vedi Fig. 4), in cui la circonferenza è rappresentata da un *hula-hoop*, e l'angolo ACB da un elastico fissato in A e B in corrispondenza di un diametro e legato in un punto C in modo da poter scorrere lungo l'*hula-hoop*. I visitatori sono invitati a variare la posizione di C e a verificare che l'angolo ACB è retto, confrontandolo con una squadra messa a disposizione.

Postazione 4: un cerchio viene diviso in due parti congruenti dal diametro

In questo caso, la dimostrazione riportata sul cartellone viene svolta utilizzando il ragionamento per assurdo, che i ragazzi hanno imparato a conoscere studiando in classe la dimostrazione del Teorema delle parallele. Se, per assurdo, i due archi nei quali una circonferenza rimane divisa dal diametro non fossero congruenti, si individuerebbero (vedi Fig. 5) almeno due raggi OC e OD della stessa circonferenza non congruenti, contraddicendo la definizione stessa di circonferenza.

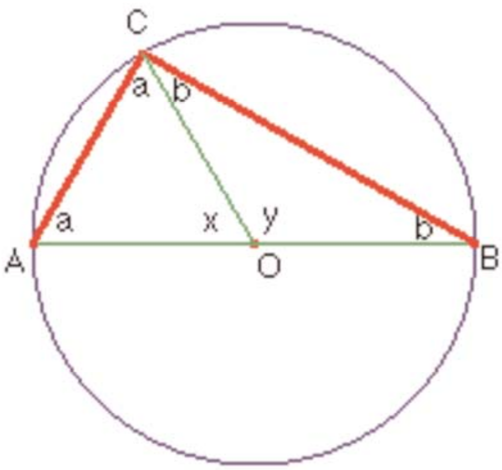


Figura 3

Figura 4

Per convincere empiricamente i visitatori, si costruisce un disco di cartoncino: piegandolo lungo un diametro, le due parti si sovrappongono perfettamente (vedi Fig. 6), mentre, piegandola lungo corde che non siano diametri, ciò non accade (vedi Fig. 7; di nuovo, con il controesempio, si sottolinea il peso dell'ipotesi del teorema). Si trae inoltre spunto da questo teorema e dal seguente passo riportato nel testo *Il Teorema del Pappagallo* per sottolineare la portata generale dei teoremi: «*La soluzione di Talete non si applica ad un cerchio in particolare, bensì a qualsiasi cerchio. La sua ambizione consiste nell'accertare verità che riguardano un'intera classe di oggetti. Una classe infinita! … non ci sarà neanche un piccolo cerchio nascosto chissà dove nel mondo, un clandestino… sfuggito al suo Teorema? … Nessuno, mai, a nessun costo!*».

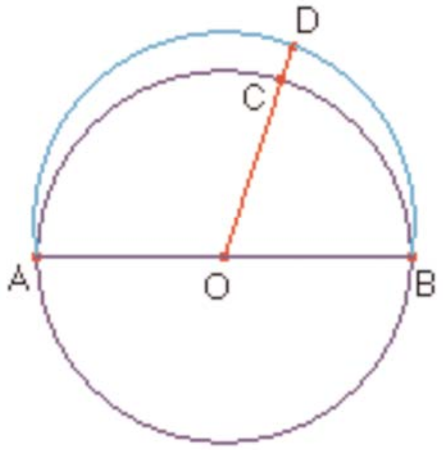


Figura 5

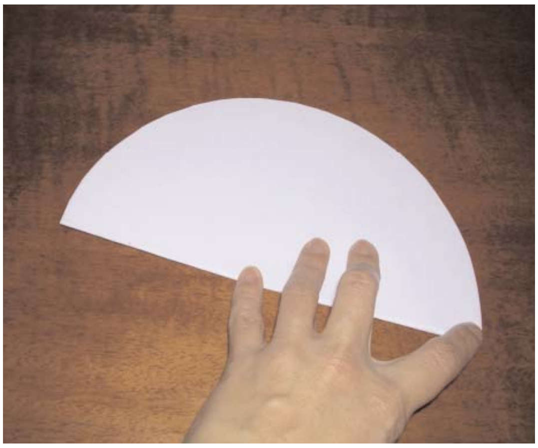


Figura 6

Figura 7

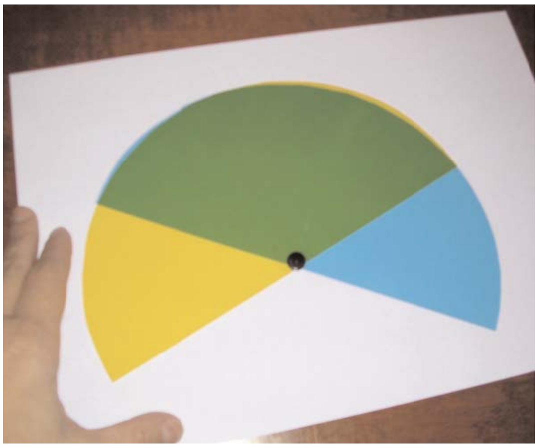


Figura 8

Postazione 5: due rette che si intersecano formano angoli opposti al vertice congruenti

Nella dimostrazione riportata sul cartellone si osserva che, dette a e c le misure degli angoli opposti al vertice considerati e b quella di uno dei due angoli adiacenti ad entrambi, si ha: $a + b = 180°$ e $b + c = 180°$. Da tali relazioni si ricava che $a = c$. Detto in altri termini, "se da cose uguali si toglie una parte comune, ciò che resta sono cose uguali". Per verificare e rendere il più evidente possibile il teorema, si costruiscono, con due fogli di acetato gialli e blu, due semicerchi e si fissano al centro del cerchio per simulare due angoli piatti liberi di ruotare l'uno sull'altro (vedi Fig. 8). Si evidenzia che, comunque si ruotino i due angoli, eliminando la parte sovrapposta, che appare di colore verde, ciò che rimane sono due angoli (colorati rispettivamente in giallo e blu) opposti al vertice e congruenti.

Per sottolineare l'importanza dell'ipotesi di partire da due angoli congruenti tra loro e utilizzare al contempo in contesti diversi lo stesso tipo di ragionamento usato per dimostrare il Teorema degli angoli opposti al vertice, si costruiscono altri due modelli. In un caso, si parte da due angoli di ampiezza qualsiasi, ma congruenti tra loro, e si ripropone lo stesso tipo di "dimostrazione" empirica visto per gli angoli opposti al vertice. Nell'altro caso, invece, si toglie una parte comune a due angoli che, in origine, non sono congruenti: ciò che resta non sono parti congruenti.

Alcune osservazioni

I ragazzi hanno deciso di presentare le cinque postazioni in modo sequenziale. Ritenevano, infatti, che, così facendo, il lavoro potesse esser svolto con maggiore ordine, chiarezza e possibilità di concentrazione anche per i visitatori.

L'esposizione è stata impostata cercando di interagire quanto più possibile con il pubblico. Il dialogo mirava a coinvolgere i visitatori attivamente, sollecitandoli anche con domande mirate e invitandoli a "giocare" essi stessi con i semplici modellini realizzati. Il dialogo attivo si è rivelato fondamentale per rispondere all'esigenza di adattare il linguaggio e le modalità espositive a seconda dell'età e delle supposte conoscenze del pubblico-interlocutore.

La maggior parte della classe si è dimostrata entusiasta e collaborativa (seppur non del tutto autonoma) fin dalle prime fasi di preparazione del lavoro, tanto da richiedere un'ulteriore possibilità di partecipazione alla prossima edizione di "La matematica dei ragazzi". Inoltre, alcuni studenti che nel corso dell'anno non avevano dato contributi, durante il convegno hanno manifestato il desiderio di prendervi parte attivamente, trascinati dall'entusiasmo del resto della classe, riuscendo così, seppur all'ultimo momento, a ritagliarsi un piccolo spazio. Per alcuni di loro è stata l'occasione per interrompere un atteggiamento di chiusura e rifiuto totale della matematica, che affondava le proprie radici molto lontano nel tempo.

Con il susseguirsi delle visite, gli studenti impegnati nell'esposizione hanno dichiarato di aver superato la timidezza e l'imbarazzo iniziali, acquistando anche maggior sicurezza e padronanza espositiva. L'imbarazzo è risultato, comunque, più evidente di fronte ai propri coetanei, mentre si è rivelato più semplice instaurare un dialogo costruttivo con i più piccoli, più curiosi ed entusiasti.

Il venirsi a trovare per una volta "dall'altra parte della cattedra" è stato inoltre utile per provare sulla propria pelle cosa significhi spiegare a qualcuno che non ascolta, o quanto sia spiacevole rivolgersi a chi intanto presta attenzione solo ai giochini del proprio telefonino o alle chiacchiere del compagno!

Nel complesso la partecipazione al convegno si è rivelata positiva e ha effettivamente aiutato gli studenti a imparare a relazionarsi con un pubblico, motivandoli a impegnarsi ad esprimersi in modo appropriato e chiaro al tempo stesso, il che presuppone, alla base, una reale comprensione e acquisizione dei concetti che si vogliono trasmettere.

Anche a distanza di quasi un anno dall'esperienza, sottoposti a un semplice questionario relativo ai contenuti esposti durante la manifestazione, la maggior parte dei ragazzi ha dimostrato di aver assimilato "in modo permanente" i concetti fondamentali.

NOTE

* Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia", via Seminario, 7, I-34170 Gorizia
e-mail: letizia.mucelli@libero.it

1 Inizialmente, nella fase di progettazione del modello, si era pensato di utilizzare una lampada per simulare il sole, ma l'idea è stata abbandonata per le difficoltà tecniche e pratiche incontrate. Infatti, oltre al fatto che la luce della lampada, non potendo essere collocata sufficientemente distante, non produce raggi pressoché paralleli come quelli solari, l'ombra prodotta non era facilmente evidenziabile con precisione in un ambiente comunque illuminato.

2 Anche interagendo con i visitatori con opportune domande, si evidenziano le difficoltà e complicazioni cui si andrebbe incontro se non ci si ponesse in questa particolare situazione, prima fra tutte quella di risalire alla lunghezza del segmento HO e quindi a quella dell'intero segmento TO.

BIBLIOGRAFIA

BOYER C. B., 1994, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

COLLI G., 1992, *La sapienza greca*, Adelphi, Milano.

DODERO N., TOSCANI J., 1988, *Lezioni di matematica*, Ghisetti & Corvi, Milano.

GUEDJ D., 2000, *Il Teorema del Pappagallo*, Longanesi, Milano.

MARISCOTTI M., CANOBBIO M., 2000, *Classe di matematica – Geometria vol. A e B*, Petrini, Torino.

Verso l'infinito... e oltre

Elisabetta Matassi* ed Emma Curci**

Introduzione

"Verso l'infinito... e oltre", un percorso multidisciplinare attraverso la matematica, la fisica e la filosofia, è il laboratorio con cui la classe IV A del Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana ha partecipato alla V edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambio di esperienze tra coetanei".

Il progetto didattico è stato inserito nel Piano dell'Offerta Formativa dell'Istituto per l'anno scolastico 2003/2004 e si è interamente svolto in orario curricolare, in quanto i temi affrontati, tanto dal punto di vista matematico quanto da quello dell'approfondimento storico-filosofico, rientrano nei programmi previsti dal Piano Nazionale per l'Informatica, nel quarto anno di corso. Lo sviluppo del progetto ha visto impegnati tutti gli allievi della classe per un periodo di circa cinque mesi, a cavallo tra il primo e il secondo quadrimestre, con una o due ore settimanali dedicate, che si sono intensificate nella fase finale.

Il progetto, come già accennato, costituisce un percorso articolato su più ambiti disciplinari e finalizzato all'acquisizione di una serie di contenuti e competenze che agevolino gli studenti nell'approccio al concetto di infinito in termini razionali e non solo puramente intuitivi. Il punto di vista viene dato da due sistemi di pensiero, quello matematico e quello filosofico, che, forse più di altri, hanno cercato e cercano di dare una sistemazione rigorosa a un concetto che sempre ha affascinato e, nel contempo, angosciato l'essere umano. L'approccio matematico, da un lato, e quello filosofico, dall'altro, hanno permesso agli allievi di acquisire strumenti conoscitivi utili *a osservare e a descrivere* l'infinito. Da un infinito inconoscibile, indefinibile, incommensurabile, attraverso un graduale processo di conoscenza fondato sul confronto, gli allievi sono giunti a definire il concetto di infinito senza ricorrere a un'accezione negativa.

Dal punto di vista matematico, il tema dell'infinito viene trattato a partire dalla cardinalità degli insiemi: gli insiemi numerici infiniti, se da un lato presentano non poche difficoltà nell'esplorazione delle loro proprietà, forniscono, dall'altro, un punto di vista di straordinaria fecondità per affrontare le problematiche connesse con l'infinito e per potenziare l'attività di storicizzazione del pensiero matematico. Il punto di partenza è costituito solitamente dalla "scoperta" che gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio e che, anzi, è proprio questa proprietà a fornire un valido criterio per distinguere gli insiemi finiti da quelli infiniti. Il passo successivo consiste nel dimostrare che N, Z e Q sono equipotenti e che quindi hanno la stessa cardinalità, definita come potenza del numerabile. Come sostiene Mario Bellipanni (cfr. Bellipanni, 2005), i due capisaldi di questo "travaglio" teorico sono certamente identificabili con le teorie di Galileo Galilei e Georg Cantor. Scrive Galileo:

> Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le lor radici, né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate.[1]

L'equipotenza tra gli insiemi dei numeri naturali, dei relativi e dei razionali sembrerebbe dar ragione a Galileo. La reazione degli allievi di fronte alla scoperta che i razionali, pur riempiendo i "buchi" tra due interi, hanno la stessa cardinalità degli interi è quasi di sconforto: l'infinito appare come un tutto indifferenziato, che assorbe e neutralizza le differenze tra gli insiemi numerici.

Si rivela pertanto dirompente l'analisi del lavoro di Cantor, con la scoperta della potenza del continuo e quindi di una infinità maggiore di quella del numerabile, in aperto contrasto con Galileo, che negava si potessero applicare agli insiemi infiniti le relazioni di maggiore e minore. La scoperta di un infinito "più grande" dell'infinito numerabile venne proposta da Cantor all'amico Dedekind, in una lettera del 12 dicembre 1873, attraverso una dimostrazione, tanto semplice quanto profonda, che si basa su una procedura di diagonalizzazione simile a quella che permette di porre in corrispondenza biunivoca i numeri naturali e i numeri razionali: se i razionali possono essere pensati come successioni limitate o illimitate periodiche di cifre, il nuovo insieme che supera la potenza del numerabile deve essere costituito da numeri che vanno al di là dei razionali.

Qui si presenta un punto cruciale dell'evoluzione del pensiero matematico. Se chiamiamo potenza del continuo questa nuova cardinalità, il passo successivo consiste nell'interrogarsi sulla possibilità che esistano cardinalità intermedie tra numerabile e continuo, così come esistono numeri intermedi tra zero e uno. Gli allievi sono stati accompagnati nella formulazione di congetture (anche basate sulla semplice intuizione) fino all'analisi della "soluzione" fornita dal matematico Paul J. Cohen in periodi piuttosto recenti (1961). Riassumendo e banalizzando (non poco) le conclusioni di Cohen, è possibile affermare che esistono almeno due teorie degli insiemi: nella prima teoria, l'ipotesi del continuo ha una risposta negativa; nella seconda, la possibilità di una cardinalità intermedia esiste. Si tratta di una situazione analoga a quella venutasi a creare in geometria, con la nascita e lo sviluppo delle geometrie non euclidee, nate anch'esse nel tentativo di dimostrare la dipendenza di un postulato da un sistema definito di assiomi.

La trattazione didattica della teoria cantoriana degli insiemi presenta non poche difficoltà a cominciare dalla sostanziale assenza di una conveniente trattazione nei testi scolastici in uso. Gli allievi sono stati pertanto guidati alla scoperta delle diverse problematiche con estrema gradualità, attraverso il continuo utilizzo di procedure euristiche ed esemplificazioni, e con il costante riferimento alla contestualizzazione storica dei problemi, che ha permesso loro di vivere un primo contatto con uno dei momenti "alti" dell'elaborazione intellettuale del nostro secolo.

Dal punto di vista filosofico, gli argomenti trattati hanno privilegiato la riflessione sugli autori in rapporto al pensiero moderno. L'occasione di confronto rivolta alla costruzione di un percorso pluridisciplinare ha portato a precisare gli aspetti di identificazione della filosofia, quali la centralità del testo, la struttura argomentativa e l'apertura ad altre discipline. L'insieme degli aspetti condivisi ha favorito il costruirsi di un'esperienza capace di comunicare e di sollecitare anche la ricerca di senso delle discipline stesse.

Gli obiettivi

Lo sviluppo del progetto si proponeva il raggiungimento delle seguenti finalità didattiche e formative:

Sapere

- acquisizione da parte dell'allievo di una serie di strumenti matematici che gli permettano di avvicinarsi al concetto di infinito in termini razionali e non solo puramente intuitivi, attraverso la formulazione di ipotesi e congetture guidate;
- acquisizione di una terminologia rigorosa e adeguata ai diversi contesti;

– conoscenza del contesto storico-filosofico in cui le diverse problematiche sono maturate e si sono sviluppate.

Saper fare

– sviluppo della capacità di utilizzare le conoscenze acquisite nella risoluzione di esercizi e problemi relativi alla teoria degli insiemi finiti e infiniti;
– sviluppo della capacità di analizzare, ed eventualmente elaborare, brevi percorsi interdisciplinari relativi ai temi in oggetto e di relazionare in merito in contesti diversi da quello di classe;
– sviluppo della capacità di creare materiali divulgativi digitali e cartacei in un'ottica di trasmissione delle conoscenze.

Saper essere

– sviluppo della capacità di lavorare in gruppo (in un contesto scuola dove l'apprendimento si fonda essenzialmente sulla rielaborazione individuale) attraverso una presa di coscienza delle proprie capacità e dei propri limiti in relazione a un obiettivo prefissato;
– maturazione dei processi di socializzazione e interazione fra pari rivolta a una conoscenza critica e consapevole delle proprie attitudini, ma anche delle proprie paure e insicurezze;
– maturazione della capacità critica rispetto all'efficacia comunicativa e argomentativa nella trasmissione delle conoscenze anche in relazione all'età degli ascoltatori.

Tempi e fasi del progetto

Il progetto "*Verso l'infinito... e oltre*" si è articolato in quattro fasi.

1. Presentazione dei contenuti

La fase di presentazione dei contenuti è stata preceduta da un momento di carattere motivazionale, in cui gli studenti sono stati sollecitati a porsi degli interrogativi di carattere matematico e filosofico e sono stati incoraggiati a formulare delle congetture basate su conoscenze pregresse, ragionamenti euristici o anche solo personali intuizioni.

Cosa significa che un insieme è infinito? È possibile definire il concetto di infinito senza ricorrere a un'accezione negativa, quindi definendolo per ciò che è? I numeri naturali sono "più" dei numeri pari? E ancora: sono "di più" i relativi o i razionali? E i numeri reali? È possibile pensare a diversi tipi di infinito? Gli insiemi infiniti godono delle stesse *proprietà di quelli finiti? E dal punto di vista fisico: pensare a più infiniti matematici ci autorizza a ipotizzare infiniti universi? In che termini le moderne teorie cosmologiche giustificano tale approccio?*

Queste sono solo alcune delle domande poste agli allievi e poi, con lo sviluppo della discussione, dagli allievi stessi. Di estremo interesse sono le considerazioni emerse. La quasi totalità degli studenti ha connotato un insieme infinito esclusivamente rispetto a ciò che esso non è e non ha nemmeno tentato di abbozzare una caratterizzazione positiva.

Rispetto alle relazioni di equipotenza tra N e una sua parte propria, quale, ad esempio, l'insieme dei numeri pari, la maggior parte ha dimostrato stupore e taluni persino incredulità nell'assoluta convinzione che le proprietà, di cui godono gli insiemi finiti, note fin dal biennio, potessero estendersi in modo naturale a quelli infiniti. Quindi i naturali sono il doppio dei pari, gli interi relativi il doppio dei naturali e i razionali sono "molti, ma molti di più" dei numeri relativi, perché "l'insieme Q è denso e quindi, riempiendo gli spazi tra due interi, è necessariamente più numeroso". Anche di fronte alla prospettata possibilità che esistano "diversi tipi di infinito", la maggior parte degli studenti ha sostenuto che "l'infinito è uno e indistinguibile e in quanto tale non classificabile".

Per quel che concerne l'approccio fisico, gli studenti si sono dimostrati più possibilisti nell'ipotizzare un universo infinito, tanto nello spazio quanto nel tempo, fino a spingersi a immaginare infiniti universi infiniti, quasi che l'infinito spaziale, fisico fosse decisamente più semplice da concepire e accettare rispetto a quello matematico.

La curiosità degli allievi rispetto alle problematiche proposte è stata ulteriormente stimolata dalla lettura e dalla discussione in classe di un'intervista rilasciata da Piergiorgio Odifreddi agli studenti di un liceo romano sui temi dell'infinito e sulla storia delle teorie che si sono succedute nel corso dei secoli. Superata questa parte "pionieristica", improntata a posizioni spesso scettiche o dogmatiche, è stato sorprendente per molti allievi scoprire che la matematica può offrire strumenti relativamente semplici per osservare e descrivere l'infinito. I contenuti proposti nell'ambito delle diverse discipline coinvolte nel progetto sono stati i seguenti:

- *Matematica*: insiemi finiti. La relazione di equipotenza tra insiemi e la definizione di cardinalità. Definizione di insieme finito. Gli insiemi infiniti: definizione ed esempi. La cardinalità del numerabile. Equipotenza di N, Z e Q. La cardinalità del continuo. I numeri cardinali transfiniti. L'ipotesi del continuo e la tesi di Cohen. L'infinito nella storia della matematica (Cusano, Bruno, Galilei, Leibniz, Cantor, Hilbert).
- *Fisica*: analisi delle principali teorie cosmologiche. Teoria dello spazio stazionario. La teoria del Big Bang. L'universo inflazionato. Il modello di Friedmann.
- *Filosofia*: l'infinito nella filosofia. Anassimandro. Anassagora. Zenone. Democrito. Aristotele. Cusano. Bruno. Pascal. Leibniz.

– *Storia dell'arte*: la rappresentazione dell'infinito nell'opera di Maurits Cornelius Escher.

2. Approfondimento dei contenuti e organizzazione del laboratorio

In questa seconda fase, gli allievi hanno approfondito le tematiche affrontate nei diversi ambiti disciplinari attraverso testi di uso scolastico e non, materiale reperito in rete e appunti forniti dai docenti.

Il lavoro di rielaborazione, propedeutico all'organizzazione del laboratorio, si è svolto in gruppi, venutisi a formare in modo spontaneo sulla base degli interessi e delle attitudini degli studenti. Data l'età e la maturità degli allievi (metà dei componenti della classe aveva già raggiunto la maggiore età prima dello svolgimento della manifestazione), si è ritenuto opportuno agevolare le inclinazioni e gli interessi dei singoli, valorizzando in tal modo la maggior predisposizione di alcuni per lo studio umanistico, di altri per quello scientifico.

All'interno dei gruppi stessi, i diversi ruoli sono stati assunti, fin dalle prime fasi, in modo ragionato e consapevole, al fine di ottimizzare le risorse a disposizione. Il coordinatore ha potuto dar prova delle proprie doti relazionali e organizzative, i relatori delle proprie capacità espositive, gli addetti alla preparazione dei materiali delle proprie abilità grafiche e del proprio senso pratico.

Di particolare rilievo in questa seconda fase è stata la preparazione dei diversi itinerari, differenziati in base all'età e ai prerequisiti dei visitatori. Data la complessità degli argomenti proposti, si è deciso, in accordo con gli studenti, di indirizzare il laboratorio ad allievi della scuola media superiore, differenziando gli interventi in base all'età (biennio o triennio) e alla provenienza (tipologia di scuola).

Si è trattato di un lavoro estremamente interessante, svolto sotto la stretta guida dei docenti, data la difficoltà dimostrata dagli studenti (abituati a relazionare solo a coloro che già conoscono l'argomento) nel differenziare il linguaggio e le modalità espositive sulla base delle caratteristiche dell'uditorio. L'interrogativo *"Secondo te, un ragazzino di quattordici anni ha capito ciò che gli hai detto?"* è stato il "tormentone" degli ultimi due mesi di lavoro, che ha però consentito agli studenti di prendere coscienza delle molteplici difficoltà legate alla trasmissione dei contenuti e alle modalità di presentazione.

Gli itinerari stabiliti sono stati sostanzialmente due, che, per quel che concerne la fisica e la storia dell'arte, si differenziavano rispetto alla complessità e al rigore del linguaggio, mentre, per quel che riguarda la matematica, erano considerevolmente diversi anche nei contenuti.

Itinerario 1: Gli insiemi finiti. Relazione di equipotenza e cardinalità. Esempi di biiezioni tra N e sue parti proprie. Definizione di insieme infinito. Equipotenza di N e Z.

Itinerario 2: Gli insiemi finiti. Relazione di equipotenza e cardinalità. Esempi di biiezioni tra N e sue parti proprie. Definizione di insieme infinito. Equipotenza di N, Z e Q. La cardinalità del numerabile. La non numerabilità di R e la cardinalità del continuo. L'ipotesi del continuo.

3. Materiali prodotti

Ogni gruppo di lavoro ha ideato, organizzato e realizzato materiali di supporto per l'allestimento della propria postazione all'interno del laboratorio, al fine di stimolare l'interesse dei visitatori e di agevolare la presentazione degli itinerari. I supporti materiali predisposti sono stati i seguenti.

- Uno o due cartelloni per ognuna delle quattro postazioni di lavoro, caratterizzati da semplici schemi riassuntivi del percorso proposto e da un gran numero di immagini, al fine di offrire un naturale completamento degli ambienti e una traccia visiva di facile lettura.

- Una presentazione in Power Point, costituita da sei diapositive da proporre ai visitatori all'ingresso del laboratorio. Ogni diapositiva si riferiva a una singola postazione e suggeriva un approccio alle tematiche proposte in chiave problematica, in modo da suscitare interesse e curiosità nel visitatore. La sistemazione digitale della presentazione è stata realizzata interamente da due studenti della classe dotati di particolari abilità grafiche e informatiche.

- Materiali di supporto colorati realizzati in carta o cartoncino (tasselli numerati, frecce, ...) per la realizzazione "pratica", in chiave esemplificativa, di corrispondenze biunivoche tra insiemi finiti e per agevolare l'introduzione di biiezioni tra insiemi infiniti e loro sottoinsiemi propri.
  A titolo di esempio, nella Tabella 1 si riportano alcune corrispondenze 1 – 1 proposte dagli allievi durante i laboratori. La possibilità di costruire "manualmente" corrispondenze biunivoche tra insiemi diversi ha attratto notevolmente la curiosità dei visitatori, agevolando il non sempre facile passaggio dall'esemplificazione alla definizione.
  Una volta introdotta la cardinalità del numerabile, la dimostrazione della numerabilità di Q - ossia della possibilità di contare i razionali, spesso erroneamente messa in discussione dagli studenti visitatori a causa della densità dei numeri razionali - è stata supportata da una tavola in cartoncino dotata di caselle per la realizzazione della procedura di diagonalizzazione dei numeri razionali (vedi Tabella 2).
  Gli allievi hanno potuto sperimentare diverse modalità intuitive per contare i razionali, verificandone di volta in volta l'efficacia.

f: N → P	g: N → D	h: N → Quadrati
f(n) = 2n	g(n) = 2n + 1	h(n) = n^2
0 → 0	0 → 1	0 → 0
1 → 2	1 → 3	1 → 1
2 → 4	2 → 5	2 → 4
3 → 6	3 → 7	3 → 9
4 → 8	4 → 9	4 → 16
5 → 10	5 → 11	5 → 25

Tabella 1

	1	2	3	4	5
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5

Tabella 2

– Un modello del Nastro di Moebius lungo circa un metro e mezzo, realizzato con una rete metallica flessibile e vincolato al soffitto dell'ambiente adibito a laboratorio, come simbolo del percorso di lavoro svolto.

– Un pieghevole in formato A4 di vari colori offerto a tutti i visitatori del laboratorio e contenente una brevissima presentazione dell'itinerario proposto, scritta dai ragazzi per i ragazzi e corredata da alcune informazioni relative alla storia della classe e alla scuola di provenienza.

– Una dispensa di 43 pagine dal titolo "*Verso l'infinito... e oltre*" (non presentata nell'ambito della manifestazione, perché ultimata solo nell'ultima parte dell'anno scolastico), in cui gli allievi hanno riproposto e interpretato in chiave il più possibile personale l'itinerario di studio e approfondimento relativo al tema dell'infinito. Come si avrà modo di spiegare più approfonditamente in seguito, la dispensa è stata utilizzata anche da allievi di classi parallele e da studenti delle classi quinte per la realizzazione di tesine da presentare all'Esame di Stato.

4. Lo svolgimento della manifestazione

Dal punto di vista della gestione degli spazi e dei tempi, si è deciso di articolare il laboratorio su quattro postazioni classicamente coincidenti con i quattro itinerari di approccio al tema dell'infinito: l'infinito attraverso la matematica, la fisica, la filosofia e la storia dell'arte.

La possibilità di seguire il percorso tra le postazioni, parzialmente o totalmente, e la flessibilità nella scelta dell'itinerario hanno permesso, in sede di manifestazione, di suddividere le classi in visita in gruppi numericamente ridotti, consentendo un'ottimizzazione dei tempi e una partecipazione più attiva da parte dei visitatori.

La partecipazione alla manifestazione è stata preceduta da una fase, durata un paio di settimane, dedicata alle "prove generali", in cui gli allievi hanno sperimentato in vari modi l'efficacia delle scelte argomentative e delle modalità espositive adottate. Particolarmente significativa ed efficace è stata la scelta di presentare in via preliminare il laboratorio a piccoli gruppi di allievi, scelti tra classi diverse all'interno dell'Istituto: solo messi a confronto con un "pubblico vero", totalmente ignaro del percorso effettuato, i ragazzi hanno infatti sperimentato la difficoltà che sempre si incontra nel motivare, coinvolgere e interessare un uditorio.

Va comunque rilevato che molti adattamenti sono stati effettuati in tempo reale, nel corso della manifestazione, in relazione al grado di interesse e motivazione dimostrato dai visitatori: gli studenti (in particolare, in alcune postazioni) hanno dimostrato un buon livello di flessibilità in itinere, nella scelta dei tempi e delle modalità comunicative.

L'itinerario proposto si è articolato in quattro momenti:

a) L'infinito attraverso la matematica: dopo un momento preliminare di carattere prettamente espositivo, dedicato alla presentazione di un breve excursus storico relativo all'evoluzione del concetto di infinito nella storia della matematica (si è accennato al pensiero di Nicola Cusano, Giordano Bruno, Galilei, Leibniz e Hilbert), gli allievi hanno proposto ai visitatori un breve percorso di avvicinamento al tema dell'infinità degli insiemi numerici, differenziando la proposta a seconda dell'età e delle conoscenze dei visitatori. L'approccio scelto è stato di tipo problematico (sono state rivolte ai visitatori le stesse domande proposte agli studenti in fase iniziale) e dialogico: gli allievi in visita sono stati invitati a porsi degli interrogativi e sono stati guidati nella formulazione delle risposte, attraverso l'utilizzo dei materiali realizzati, nell'ottica di un approccio euristico e intuitivo basato sulla possibilità di vedere, provare e sperimentare. I visitatori sono stati sollecitati a manipolare frecce e tasselli numerici e a costruire corrispondenze biunivoche e non, prima tra insiemi finiti e poi, lavorando ovviamente su un numero finito di immagini, tra insiemi infiniti e loro parti proprie. La definizione e la caratterizzazione degli insiemi infiniti è stata introdotta come tappa ultima di un processo di scoperta. La numerabilità di Z e Q è stata suggerita invitando gli allievi in visita a escogitare modi per contare i numeri relativi e razionali. La cardinalità del continuo e la scoperta dell'esistenza di "infiniti diversi" sono state proposte solo a classi del triennio. In un caso, la passività dell'uditorio, pur sufficientemente maturo, ha indotto i relatori a optare per l'itinerario meno impegnativo.

b) L'infinito attraverso la filosofia: la docente, accogliendo la proposta di un'esperienza interdisciplinare nell'ambito del tema "L'infinito", ha cercato di ricostruirne, con la classe IV, valenze formative e significati filosofici nel rapporto tra filosofia e matematica.

c) L'infinito attraverso la fisica: i visitatori sono stati sollecitati a interrogarsi sul significato di spazio infinito e tempo infinito e sono stati guidati nell'analisi delle principali teorie cosmologiche circa la geometria dell'universo, la sua nascita e la sua evoluzione. L'obiettivo non consisteva comunque nel fornire una presentazione approfondita ed esaustiva, quanto nel suscitare negli allievi visitatori curiosità e interesse riguardo ad alcune domande di fondo: l'universo è finito o infinito? Ha avuto un inizio? E avrà una fine?

d) L'infinito attraverso la storia dell'arte: dopo un breve excursus dedicato alla rappresentazione dell'idea astratta di infinito nell'arte, gli allievi si sono soffermati sull'opera di Maurits Cornelius Escher, commentando alcune opere in cui l'artista propone il tema dell'infinito e che sono sostanzialmente suddivisibili in tre serie: i cicli infiniti, caratterizzati dalla continuità e periodicità presente in alcuni elementi, quali l'acqua di una cascata o le scale di un castello, la divisione regolare del piano, che mette in luce l'idea di ripetitività all'infinito, e i limiti in cui la suddivisione del piano viene ripresa, creando l'idea di infinitamente piccolo attraverso un rimpicciolimento delle figure verso il centro o verso la circonferenza del cerchio, in accordo con i modelli delle geometrie non euclidee.

Analisi dell'esperienza

L'analisi dell'esperienza si fonda essenzialmente sulle osservazioni dirette del lavoro svolto dagli studenti prima, durante e dopo la manifestazione e su brevi elaborati prodotti dagli allievi stessi, al termine del progetto, e contenenti libere riflessioni su impressioni, emozioni e difficoltà emerse in relazione ad aspettative e obiettivi.

Prendendo spunto dall'analisi effettuata in Gallopin (2004), mi soffermerò prevalentemente sugli aspetti relazionali ed emotivi, sulle problematiche legate all'apprendimento della matematica e sulle ricadute a lungo termine dell'esperienza.

Aspetti relazionali e difficoltà emerse

Per quel che concerne la fase di preparazione che ha preceduto la manifestazione, va rilevato come all'inizio la maggior parte degli allievi ha accolto la proposta di partecipazione all'iniziativa con una certa preoccupazione, se non addirittura contrarietà. Le motivazioni di un tale atteggiamento sono molteplici: da un lato, emergeva la preoccupazione di un impegno eccessivo, che, andandosi ad affiancare al già rilevante carico scolastico, avrebbe reso ancora più difficile il mantenimento dei livelli di profitto (va detto che la classe è caratterizzata da un forte gruppo trainante, composto da studenti estremamente "ambiziosi" e spesso interessati più alla valutazione che all'apprendimento in se stesso); dall'altro lato, si percepiva una certa preoccupazione nella prospettiva di parlare in pubblico e, più in generale, di essere valutati su aspetti del proprio modo di essere e di agire diversi da quelli usuali. A fronte di tali preoccupazioni si è ritenuto importante tranquillizzare gli studenti in merito alla valutazione (eventuali "insuccessi" o difficoltà non avrebbero contribuito in maniera determinante ad aggravare situazioni di difficoltà) e agevolare il costituirsi di gruppi spontanei di lavoro sulla base di interessi e attitudini, già ormai consolidati in allievi quasi maggiorenni.

La fase di presentazione dei contenuti ha ovviamente coinvolto l'intero gruppo classe, ma il successivo momento di approfondimento ha visto gli allievi impegnati negli ambiti di lavoro e nei ruoli che maggiormente sentivano affini. Probabilmente sarebbe stato più interessante vedere i ragazzi mettersi alla prova in ambiti a loro meno vicini, ma diventava davvero difficile "costringere" studenti di diciotto anni a unirsi al gruppo dei "matematici", quando da anni non ottenevano una sufficienza in quella disciplina. Lasciati liberi di seguire i propri interessi e le proprie inclinazioni, gli allievi hanno dimostrato autonomia nell'organizzazione del lavoro, senso di responsabilità rispetto agli obiettivi concordati e anche una certa creatività nella preparazione di itinerari e materiali. Anche gli studenti che nel corso della loro carriera scolastica avevano sempre dimostrato disinteresse e passività nello studio della matematica, hanno evidenziato, in un contesto non formale, spirito di iniziativa e buone capacità organizzative. Un particolare plauso va attribuito a due allievi, che, in modo del tutto autonomo, hanno ideato e realizzato i supporti digitali per i laboratori, e al gruppo di allieve che ha allestito la postazione matematica, dotandola di materiali efficaci e accattivanti.

Durante la manifestazione, tutti gli studenti, pur con capacità ed esiti diversi, si sono impegnati, con spirito di collaborazione, alla riuscita del laboratorio. Le principali difficoltà si sono rilevate nell'incapacità di adeguare, in tempo reale, le modalità espositive alle caratteristiche dell'uditorio, soprattutto in relazione ad allievi più giovani; solo due gruppi sono stati in grado – e limitatamente alla seconda parte della mattinata – di interagire con i visitatori, utilizzando *feedback* costruttivi e modificando tempi e scelte espositive.

Dai brevi elaborati prodotti dagli allievi (che non possono, però, testare in modo obiettivo i risultati dell'esperienza) è emerso che la maggior parte di essi (compresi coloro che presentavano un rendimento non elevato) ha ritenuto più che positiva l'esperienza vissuta, in quanto ha permesso di *"scoprire che è possibile studiare la matematica anche in modo diverso"* e che *"analizzare l'evoluzione storica di alcuni concetti rende più comprensibile e agevole lo studio di definizioni e teoremi"*. Dal punto di vista dei rapporti interpersonali, la maggioranza degli allievi ritiene che l'esperienza non sia servita a migliorare di molto i rapporti, ormai piuttosto delineati, tra compagni, ma a consolidare amicizie e collaborazioni già esistenti.

Scrive M.: «*Con quelli con cui ho sempre lavorato bene ho continuato a lavorare bene, con gli altri la collaborazione è rimasta difficoltosa*». Tutti gli studenti hanno evidenziato quanto sia stato utile e, nel contempo, difficile rapportarsi con visitatori diversi per età, preparazione e interessi.

Aspetti legati all'apprendimento della matematica

Dal punto di vista dell'assimilazione dei contenuti proposti nel laboratorio, le prove di valutazione effettuate al termine del progetto hanno chiaramente evidenziato un miglioramento dei livelli di profitto nella quasi totalità degli allievi. La necessità di dover spiegare ad altri i contenuti appresi e l'attività di approfondimento degli stessi in modo non tradizionale hanno permesso un'interiorizzazione decisamente maggiore delle tematiche proposte, anche a distanza di settimane dallo svolgimento della manifestazione. Scrive un'allieva: «*Fatemi fare un laboratorio anche sulle derivate ed è la volta che le imparo!*».

Effetti a breve e a lungo termine dell'esperienza didattica

Purtroppo il trasferimento ad altro istituto della docente di matematica e la collocazione su classi diverse di quella di filosofia hanno impedito una verifica a lungo termine degli effetti dell'esperienza didattica, sia per quanto concerne l'assimilazione dei contenuti, sia in relazione al rapporto docente/discente. Va comunque sottolineato che diverse e rilevanti sono state le ricadute dell'esperienza a breve termine, non solo rispetto alla classe direttamente coinvolta, ma anche sull'intero Istituto. Conclusa la manifestazione, si è deciso di adibire un'aula della Scuola, rimasta inutilizzata, all'allestimento del laboratorio, che quindi è diventato patrimonio culturale e conoscitivo di tutti gli studenti. Gli allievi della IV A hanno riproposto gli itinerari realizzati a tutte le classi interessate. In particolare, per quel che concerne le classi quinte, un allievo, estremamente coinvolto dall'esperienza, ha deciso di trarre spunto dalla visita al laboratorio per la realizzazione della tesina d'esame, scegliendo proprio il tema dell'infinito nella storia del pensiero matematico e filosofico. Il laboratorio è stato visitato anche da classi provenienti dalle scuole medie dei paesi vicini, quale tappa di un progetto più ampio di orientamento alla scelta degli studi superiori.

NOTE

*Liceo Scientifico "E. L. Martin'"
di Latisana (UD)
e-mail: matassi.elisabetta@libero.it

** Liceo Scientifico "E. L. Martin'"
di Latisana (UD)

1 Carugo & Geymonat (a cura di), 1958, p. 45.

BIBLIOGRAFIA

BELLIPANNI M., 2005, *Insiemi, strutture e calcolo*, FORCOM, Roma.

BOYER C.B., 1968, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

BURTON D.M., 1985, *The History of Mathematics: an Introduction*, Wm.C. Brown, Dubuque.

CARUGO A., GEYMONAT L. (a cura di), 1958, *Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Boringhieri, Torino.

ERNST B., 1990, *Avventura con figure impossibili*, Taschen, Berlin.

GALLOPIN P., 2004, "Un progetto matematico realizzato in un ambiente non formale: l'apprendimento come evento sociale", in ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000 – 2002*, EUT, Trieste, pp. 207-221.

LAMBERTI L., MEREU L., NANNI A., 2003, *Corso di Matematica 3*, Etas, Milano.

OSSERMAN R., 1995, *Poesia dell'Universo*, Longanesi, Milano.

SARTORE DAN A., 1998, *I disegni periodici in geometria: applicazioni didattiche del metodo di Escher*, Erickson, Trento.

SMOLIN L., 1998, *La vita del cosmo*, Mondolibro, Milano.

WEINBERG S., 1987, *Alla ricerca delle leggi ultime della fisica*, Il Melangolo, Genova.

ZELLINI P., 1993, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano.

ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000 – 2002*, EUT, Trieste.

Pitagoricamente parlando

Paola Gallopin *

Premessa

"La matematica dei ragazzi" è un'esperienza di forte significato per gli studenti di ogni ordine scolastico, siano essi relatori o visitatori. Insegno matematica in una delle due sezioni sperimentali PNI del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste, al biennio, da 4 anni e ho partecipato sia all'edizione del 2002 (Gallopin, 2004a; 2004b) sia a questa del 2004; avevo avuto modo di visitare i laboratori delle precedenti edizioni come osservatrice esterna, in modo del tutto individuale. L'impatto è sempre lo stesso: un coro di voci che, con entusiasmo e passione, coinvolge il visitatore in un'avventura unica. Certo, essere visitatore o relatore richiede investimenti a livello emozionale molto diversi e ciò è il motore primo che spinge a voler vivere quest'esperienza con una propria classe. Il laboratorio, dal titolo "*Pitagoricamente parlando*" presentato alla IV edizione di "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze fra coetanei", è stato realizzato dai ragazzi della I A del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste nell'a.s. 2003/2004. Ho scelto anche questa volta di coinvolgere la prima classe del corso sperimentale (insegno anche in un corso tradizionale, sempre al biennio) e i motivi sono principalmente i seguenti:

– gli studenti del corso sperimentale sono decisamente più motivati e disponibili a un lavoro in ambito matematico che viene loro proposto tutto in orario extracurricolare;

– gli studenti del corso sperimentale solitamente partecipano in maniera del tutto volontaria alle attività inerenti alla matematica proposte dalla scuola (gare, conferenze, stage), cosa che gli studenti del corso tradizionale raramente fanno.

Inoltre trovo che, per come viene impostato il lavoro, essi abbiamo un'ottima occasione per fare matematica in maniera collaborativa e non competitiva. Gli altri progetti di matematica offerti in ambito scolastico prevedono:

– gare, per lo più individuali (nelle quali spesso si sviluppa anche una certa competizione), ma anche a squadre (e pertanto, da una parte, collaborazione, dall'altra, competizione con le altre squadre);
– conferenze, in cui gli studenti hanno un ruolo solitamente passivo, da ascoltatori; raramente tali conferenze si concludono con un dibattito fra relatore e uditorio;
– *stage*, nei quali gli studenti possono o meno lavorare assieme (ciò dipende dalla tipologia dello *stage*).

"La matematica dei ragazzi", invece, è un progetto che li coinvolge collettivamente e che non li mette assolutamente in competizione, né fra di loro né con gli altri studenti relatori.

La scelta di coinvolgere una prima classe, anziché una seconda, è dettata dalle seguenti considerazioni:

– iniziando la fase di preparazione del progetto a dicembre, trovo che esso dia la possibilità all'insegnante e agli studenti di conoscersi meglio e non solo nel contesto classe: il lavoro di gruppo, che coinvolge la totalità degli alunni, li costringe a confrontarsi l'uno con l'altro e non solo con il *"compagno che si conosce dalle medie"*; la presenza dell'insegnante-collaboratore fa capire agli studenti quanto insegnante e allievi formino una squadra che lavora assieme, con gli stessi intenti, nella medesima direzione, anche in classe;

– poiché l'attività di preparazione si svolge in orario extracurricolare (per mia scelta e necessità), solitamente in ambienti diversi dall'aula della classe, ciascuno studente può esprimersi più liberamente, senza sentirsi giudicato né dall'insegnante né dai compagni, mettendo così in evidenza abilità e competenze non solo relative ai saperi, ma anche di altra natura (organizzative, di mediazione, ...).

La classe coinvolta nell'edizione del 2004 è una classe sperimentale PNI ed è composta da 25 studenti, dei quali 9 ragazze e 16 ragazzi. La classe si caratterizza da sempre per un forte interesse verso la matematica e una decisiva curiosità che, molto spesso, spinge gli studenti a ricerche autonome e approfondimenti che esulano dai programmi previsti dal loro piano di studi. È una classe molto disponibile e collaborativa, spesso instancabile, che affronta quanto viene proposto con entusiasmo, in tutte le discipline; al contempo è anche piuttosto critica e rivisita quanto ha fatto quasi sempre in maniera obiettiva. Il progetto è stato inserito nel Piano dell'Offerta Formativa dell'Istituto per l'anno scolastico 2003/2004: come per l'edizione precedente, esso è stato considerato attività obbligatoria, nell'ambito della flessibilità oraria, per tutti gli studenti della classe. La tematica trattata nel laboratorio, da me scelta, è un percorso che dal Teorema di Pitagora conduce all'introduzione dei numeri irrazionali, prevedendo una successiva sistemazione formale dei contenuti nella classe seconda.

Il metodo

Dopo aver spiegato brevemente agli studenti, nel primo incontro, quale sarebbe stato il loro ruolo durante la manifestazione e gli obiettivi della manifestazione stessa (solo tre studenti conoscevano "La matematica dei ragazzi": uno come visitatore, uno come protagonista e uno sia da visitatore sia da protagonista), ho proposto la tematica che sarebbe stata sviluppata nel loro laboratorio. La scelta di un tale percorso è stata dettata dalla necessità di introdurre i numeri reali e, in particolare, i numeri irrazionali, che tratto generalmente nella classe seconda, anche sotto l'aspetto storico ed epistemologico.

Durante la fase di preparazione, per quanto possibile, ho cercato di far lavorare gli studenti in maniera autonoma, sia sull'acquisizione dei contenuti, sia sulle scelte espositive. Alla luce dell'esperienza fatta nel 2002, ho deciso di far lavorare gli studenti da soli anche per quanto riguarda l'apprendimento dei contenuti: è ovvio che ciò comporta il rischio di dover poi operare su conoscenze sbagliate, ma un monitoraggio discreto e costante limita di molto questo rischio. Fra l'altro, gli studenti chiedevano continuamente conferma di quanto ritenevano di aver capito e quindi eventuali errori concettuali venivano subito corretti. Ho notato, infatti, che spiegare prima i contenuti e poi lasciare agli alunni l'organizzazione degli stessi, produce per lo più, con ragazzi di 14-15 anni, una riproduzione non sempre fedele di quanto è stato loro illustrato, come risultato di una rielaborazione/mediazione, in cui l'obiettivo è quello di *dire cose giuste, ma con le mie parole*, il che porta spesso a inesattezze o alla banale ripetizione di quanto detto dall'insegnante. Solo gli studenti più abili e consapevoli riescono effettivamente a fare una rielaborazione propria e corretta di quanto spiegato. Lasciare invece il compito agli studenti di apprendere da soli, in prima battuta, un certo concetto, produce la volontà di *spiegare con mie parole all'insegnante per vedere se ho capito* e poi una successiva formalizzazione con l'aiuto dell'insegnante. È scontato affermare che quanto si apprende con le proprie forze, per scoperta propria, ha un altro valore e sapore: anche gli studenti più piccoli hanno questa consapevolezza. In ogni caso, mentre alcuni argomenti sono stati studiati, rimeditati e organizzati in maniera del tutto autonoma (Teorema di Pitagora, dimostrazioni e applicazioni, terne pitagoriche), altri, come l'algoritmo di Erone, hanno richiesto un intervento decisivo da parte mia, non solo per chiarimenti rispetto alla procedura, ma specie per delucidazioni in merito al concetto sviluppato (per esempio, quello di numero irrazionale).

Ho messo a disposizione degli studenti del materiale cartaceo sull'argomento e ho dato delle indicazioni su come reperirne altro. La rete Internet è stata utilizzata parecchio dagli studenti, con ricerche non sempre efficaci; sono stati utilizzati molto anche testi scolastici di familiari, mentre io stessa ho provveduto a procurarne di più specifici[1].

Collettivamente, invece, sono stati scelti gli argomenti da presentare a diverso livello scolare (diversi studenti hanno coinvolto le proprie madri, insegnanti di scuola elementare o media, per stabilire le conoscenze degli studenti visitatori e i prerequisiti che avrebbero potuto avere a disposizione) e sempre assieme sono state decise le attività di laboratorio.

Il reperimento di materiali per il laboratorio (corde, gommapiuma, ecc.) e la costruzione degli strumenti per le relative attività, invece, è stata totalmente opera degli studenti. Le schede di laboratorio sono state realizzate in fase conclusiva e pensate per i diversi livelli di studenti visitatori dagli studenti stessi, con la mia supervisione.

Gli studenti hanno realizzato i cartelloni, pensando anche che la loro stesura sarebbe potuta poi risultare utile in un momento di "smarrimento" durante la presentazione.

Ci sono stati diversi pomeriggi di lavoro da dicembre a maggio, con scadenza quasi settimanale: tutto il lavoro è stato svolto in orario extracurricolare, e, se ciò non ha influito sul normale svolgimento della programmazione annuale, sicuramente è stato pesante per questi studenti già molto impegnati in diverse attività pomeridiane.

Obiettivi del laboratorio

Gli obiettivi che mi sono proposta sono riassumibili in due categorie.

Riguardo ai *contenuti*:

– *apprendimento del Teorema di Pitagora (e del suo inverso) e di alcune dimostrazioni diverse da quella proposta da Euclide negli Elementi.* Per arrivare a ciò, si è cercato di far capire come il Teorema di Pitagora e il suo inverso caratterizzino i triangoli rettangoli (se un triangolo è tale che i suoi lati verificano la relazione espressa dal Teorema di Pitagora, allora esso è un triangolo rettangolo, e viceversa) e si sono proposte dimostrazioni diverse e più intuitive rispetto a quella degli *Elementi* di Euclide, che si studia in classe seconda. Infine si è voluto sottolineare il fatto che il Teorema di Pitagora si può generalizzare prendendo, al posto di quadrati, figure piane simili tra loro, costruite sui cateti e sull'ipotenusa.

– *costruzione di terne pitagoriche, cioè di numeri interi x, y, z tali che $x^2 + y^2 = z^2$*. Mediamente gli studenti hanno coscienza che, determinata una terna pitagorica (solitamente 3, 4 e 5), si possono ottenere altre terne prendendo multipli di essa. Ritenevo qui necessario far loro vedere che è sempre possibile costruire una terna pitagorica a partire da due numeri naturali qualsiasi n e m, con $n > m$.

– *introduzione ai numeri reali attraverso il computo approssimato di radici quadrate con l'algoritmo di Erone*. L'introduzione ai numeri reali è una tematica che viene sviluppata nel secondo anno: sono diversi i modi attraverso i quali si possono introdurre i reali, ma ritengo sia prima necessario che gli studenti acquistino consapevolezza di cosa sia un numero irrazionale. L'algoritmo di Erone permette ciò e mostra, passo dopo passo, delle successioni di numeri razionali che approssimano per difetto e per eccesso un numero reale.

Gli *obiettivi* di tipo trasversale erano i seguenti:

– *migliorare il proprio modo di comunicare:* l'esigenza di spiegare un qualsivoglia concetto ad altre persone che non lo conoscono, con lo scopo di farsi capire, spinge l'allievo a meditare sull'organizzazione del suo discorso e sui punti chiave di esso. Solitamente, infatti, lo studente è abituato a esporre i contenuti all'insegnante, ben conscio però che l'insegnante già conosce quanto lui dirà e pertanto è più facilitato nel capire la sua spiegazione: ciò non lo aiuta a compiere uno sforzo di chiarezza;

– *acquisire sicurezza nell'esposizione di contenuti:* aver meditato sui contenuti da esporre permette sicuramente una maggior serenità durante l'esposizione e pertanto meno titubanza e più padronanza della tematica;

– *acquisire proprietà di linguaggio:* nei criteri di valutazione presenti nel PEI d'Istituto è chiaramente espresso che è oggetto di valutazione anche l'utilizzo di un linguaggio appropriato. Esso pertanto va sviluppato e gli studenti/relatori hanno la necessità di usarlo in fase espositiva e quindi fanno un sensibile sforzo per acquisirlo;

– *sviluppare capacità esplicative del proprio discorso in base al feedback ricevuto dall'uditorio:* il nostro laboratorio prevedeva visitatori di ogni ordine scolastico; ovviamente ciò richiede una capacità esplicativa diversa, un'abilità di moderazione rispetto al proprio discorso che deve, necessariamente, essere flessibile: in primo luogo, esso deve tener conto dell'età dei visitatori e quindi della loro capacità di comprensione (sia dei concetti che del linguaggio) e, in secondo luogo, deve mantenere alti interesse e motivazione;

– *sviluppare capacità organizzative di contenuti in modo trasversale:* poiché la presentazione dei contenuti doveva venir ideata dal gruppo classe senza ricalcare quanto proposto da testi scolastici o altro, gli studenti dovevano fare uno sforzo di riorganizzazione dei contenuti con una visione d'insieme ampia e non legata strettamente all'argomento che sarebbe stato poi oggetto della loro esposizione. Sviluppare capacità organizzative in attività di gruppo. Non è sempre facile, durante le attività curricolari, organizzare attività di gruppo: in realtà, il lavoro collettivo è molto produttivo; gli studenti hanno il vantaggio di poter usufruire anche delle abilità e competenze altrui e lo svantaggio di fare i conti con personalità con esigenze e volontà diverse. Ma se la diversità è ricchezza, essi devono imparare a organizzare al meglio il gruppo di lavoro, facendo in modo che tutti partecipino attivandosi in ciò che sanno fare meglio e contribuendo nella misura e nelle modalità che ritengono più opportune;

– *sviluppare capacità di mediazione:* poiché il lavoro di gruppo inevitabilmente porta a scontri di personalità, sta agli studenti più carismatici, ma non solo a loro, trovare capacità di mediazione e far sì che realtà e modi di vedere diversi possano convivere e arricchirsi;

– *socializzazione:* nelle classi di prima superiore solitamente accade che gli studenti vivano molto la realtà scolastica in gruppetti, i cui elementi si conoscono già dalla scuola media. È sicuramente obiettivo della scuola far sì che essi socializzino anche con altri studenti e imparino a conoscersi e ad apprezzarsi. Il lavoro di gruppo permette anche ai più timidi di far parte della classe ed è una buona occasione per realizzare tale obiettivo.

I contenuti

Come già precedentemente detto, la tematiche sviluppate sono suddivisibili in tre aree: la prima relativa al Teorema di Pitagora, la seconda alle terne pitagoriche e l'ultima ai numeri irrazionali. È stato abbastanza naturale pensare poi a una suddivisione del laboratorio in tre aree con relative postazioni, nelle quali si svolgevano una spiegazione frontale e attività di laboratorio. Qui di seguito si riporta brevemente quanto proposto.

Le lezioni frontali erano le seguenti:

Postazione 1 – Teorema di Pitagora

Scrive uno studente: «*Questa postazione è stata pensata con l'intento di approfondire lo studio di uno dei teoremi più famosi dell'Antichità, studiarne delle dimostrazioni diverse da quella proposta negli Elementi e capirne la generalizzazione e le più immediate applicazioni*».

La postazione prevedeva dapprima un'introduzione storica al teorema, specie per gli studenti visitatori della scuola elementare, che conduceva poi all'enunciato del teorema stesso. Successivamente se ne presentava una verifica sperimentale, rivolta in modo particolare agli studenti più piccoli, basata sull'equivalenza di figure piane: utilizzando carta quadrettata, si valutava l'area dei quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo e si verificava la validità del teorema. Per gli studenti più grandi era prevista, invece, la dimostrazione basata sul confronto delle Fig. 1 e Fig. 2.

Il teorema veniva poi generalizzato con figure piane simili tra loro, costruite sui cateti e sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Si applicava poi il Teorema di Pitagora al quadrato (ottenendo la sua diagonale $d = \sqrt{2}\, l$) e al triangolo equilatero (ottenendo la sua altezza $h = \sqrt{3}\, l$).

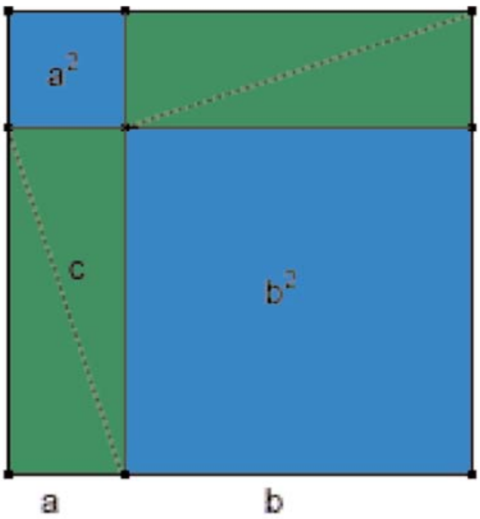


Figura 1

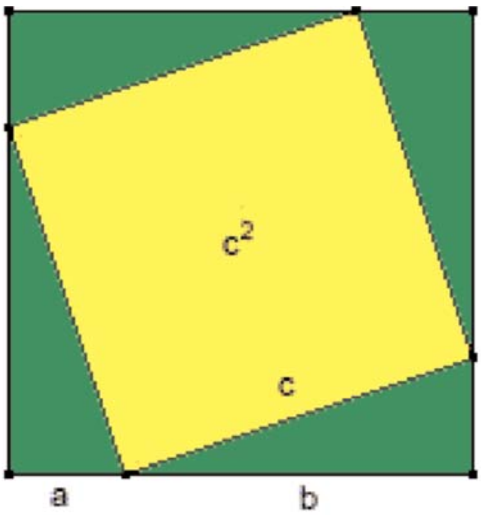


Figura 2

Postazione 2 – Terne pitagoriche

Questa postazione prevedeva la costruzione di terne pitagoriche. Si iniziava con la terna 3, 4 e 5 e si calcolavano multipli di essa. Si procedeva, poi, con la costruzione di una generica terna pitagorica a partire da due numeri naturali n e m di cui uno maggiore dell'altro. La costruzione algebrica della terna x, y e z a partire dai naturali n e m veniva proposta nei dettagli solo agli studenti della scuola superiore, nel seguente modo: siano x, y i cateti di un triangolo rettangolo e sia z l'ipotenusa. Ovviamente sarà $x, y, z > 0$. Se il triangolo è rettangolo, vale il Teorema di Pitagora, per cui

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Dividiamo ambo i membri per x^2 (x è maggiore di 0) ottenendo così

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{z^2}{x^2}$$

da cui si ha

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1$$

Siano $\alpha = \frac{z}{x}$ e $\beta = \frac{y}{x}$. Allora $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, con α e $\beta \in \mathbb{Q}$, da cui si deduce che $(\alpha + \beta)$ e $(\alpha - \beta)$ sono reciproci. Sarà allora:

$$\alpha + \beta = \frac{m}{n}$$

$$\alpha - \beta = \frac{n}{m}$$

con m e n numeri naturali, $m > n > 0$. Si ottiene:

$$\alpha = \frac{m^2 + n^2}{2mn} \qquad \beta = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$$

per cui si può prendere, ad esempio:

$$x = 2mn \qquad y = m^2 - n^2 \qquad z = m^2 + n^2$$

Questa postazione era stata pensata non solo per comprendere come è possibile generare terne pitagoriche, ma anche per spiegare l'inverso del Teorema di Pitagora, come si capirà meglio dall'attività di laboratorio descritta in seguito.

Postazione 3 – Numeri irrazionali

Dopo aver mostrato l'incommensurabilità del lato del quadrato e della sua diagonale, gli studenti illustravano il calcolo di $\sqrt{2}$ con l'algoritmo di Erone, che permette di calcolare la radice quadrata di ogni numero positivo. Brevemente, si procede come segue.

Sia $a > 0$. Se $a^2 < n$ allora $a < \sqrt{n}$; se $a^2 > n$, allora $a > \sqrt{n}$. Supponiamo che $a < \sqrt{n}$. Allora $\frac{n}{a} > \sqrt{n}$. Dunque a è una approssimazione inferiore di $\sqrt{n}$, mentre $\frac{n}{a}$ è una approssimazione superiore di $\sqrt{n}$. Si osserva che $\sqrt{n}$ è la media geometrica di a e $\frac{n}{a}$. Poiché si verifica facilmente che la media geometrica di due numeri (diversi fra loro) è sempre minore della loro media aritmetica, detta b_1 la media aritmetica di a e $\frac{n}{a}$, si ha

$$a < \sqrt{n} < b_1 < \frac{n}{a}$$

Poniamo $\frac{n}{a} = b_0$, quindi $b_1 < b_0$. Sia $\frac{n}{b_1} = a_1$: allora $a_1 < \sqrt{n}$ e $a_1 > a$. Se si itera questo procedimento, si riescono a costruire una successione $\{a_n\}$ di approssimazioni inferiori di $\sqrt{n}$ e una successione $\{b_n\}$ di approssimazioni superiori di $\sqrt{n}$ che migliorano a ogni passo.

L'approccio ai numeri irrazionali era pertanto di tipo numerico. Gli studenti utilizzavano l'algoritmo di Erone con $n = 2$ e $a = 1$.

Si mostrava che l'ampiezza degli intervalli, aventi per estremi le medie geometriche e quelle aritmetiche, che via via si ottengono, diminuisce sempre più e permette quindi di ottenere una miglior approssimazione del numero irrazionale cercato.

Ogni postazione prevedeva, oltre a un momento di lezione frontale con l'ausilio dei cartelloni preparati *ad hoc*, ulteriori spiegazioni con strumenti alternativi e un momento di laboratorio collettivo. Si riassumono brevemente le attività di laboratorio associate a ogni postazione.

Postazione 1

Si ripercorreva, con l'ausilio di un modello fisico costruito da uno studente, la dimostrazione del Teorema di Pitagora proposta. Si utilizzavano poi dei triangoli e dei quadratini in cartoncino per verificare il Teorema di Pitagora secondo la prima verifica proposta. Agli studenti visitatori della scuola elementare e scuola media inferiore si forniva una scheda guidata, per svolgere l'attività di laboratorio in modo autonomo.

Postazione 2

Si verificava sperimentalmente l'inverso del Teorema di Pitagora utilizzando una corda con dei nodi posti a intervalli regolari – come gli Egiziani – e controllando che il triangolo ottenuto avesse un angolo retto. Successivamente, gli studenti ospiti, utilizzando una scheda predisposta allo scopo, costruivano terne pitagoriche con entrambi i metodi appresi, ovvero costruendo multipli della terna 3, 4, 5 e verificando che essi formano una terna pitagorica e scegliendo, poi, due numeri naturali, calcolando x, y e z con le formule precedentemente ricavate e verificando che i tre numeri trovati costituiscono una terna pitagorica.

Postazione 3

Nel laboratorio gli studenti ospiti calcolavano, con delle calcolatrici dotate delle sole operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione, il valore di approssimazioni inferiori e superiori di $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ con il metodo di Erone, aiutati dagli studenti relatori. Essi riportavano i valori trovati su una retta orientata al fine di vedere come l'ampiezza dell'intervallo, che ha per estremi l'approssimazione inferiore e quella superiore, diminuisca a ogni passo dell'algoritmo e, in tal modo, si possa ottenere una buona approssimazione del numero irrazionale cercato.

Osservazioni sullo svolgimento dell'attività

Le considerazioni che seguono derivano da mie osservazioni, da scambi di opinioni e confronto con gli studenti e da un questionario proposto a tutti gli studenti relatori della IV edizione di "La matematica dei ragazzi", assegnato dopo la manifestazione[2].

La fase di preparazione

La fase di preparazione del laboratorio, come già anticipato, è durata da dicembre a maggio e si è svolta interamente in orario extracurricolare. La quasi totalità degli studenti (solamente due studenti non hanno partecipato ai preparativi: uno di essi abita fuori dal Comune, l'altro invece sembrava avere impegni improrogabili) si è sentita particolarmente coinvolta e responsabile dell'esito del laboratorio.

Poiché la classe è molto unita, gli studenti hanno creato autonomamente dei gruppi di lavoro omogenei e hanno distribuito il lavoro da fare stando molto attenti alle capacità del singolo. Va sottolineato che i gruppi non si sono formati per affiatamento personale, ma facendo in modo che ogni gruppo avesse pari opportunità. La stesura finale della trattazione storica della scuola pitagorica è stata affidata a uno studente molto brillante in storia; la costruzione di modelli è stata effettuata da chi, in altre occasioni, aveva dimostrato buone capacità manuali; la compilazione dei cartelloni è stata fatta solo *da chi aveva una scrittura bella e chiara*... Tutti comunque ritengono di aver lavorato *in gruppo* durante la fase di preparazione: per alcuni di essi, però, *lavorare in gruppo* significa condividere gli stessi spazi, non sempre l'apprendimento e/o l'impegno.

Ciò che sicuramente ha colpito la mia attenzione è come gli studenti più bravi riuscissero a spiegare ai loro compagni gli argomenti che collettivamente cercavano di capire, quasi fosse una loro responsabilità che tutti fossero in grado di capire e di spiegare, in un momento successivo, a un visitatore qualsiasi. Dal questionario è emerso che il 72% degli studenti ha trovato più facilità nell'assimilare i contenuti lavorando in gruppo. Un 20% non ha trovato la cosa più facile: va detto che tre di questi studenti sono piuttosto individualisti, una studentessa ha generalmente difficoltà ad acquisire subito quanto impara e infine una di essi è molto brava e pertanto andrebbe associata a quell'8% di studenti, anch'essi molto bravi, che non hanno risposto a tale domanda, forse perché essi stessi spiegavano agli altri i concetti e le tematiche sviluppate e probabilmente non hanno tratto un giovamento diverso da quello che solitamente hanno nell'apprendere una certa cosa. D'altra parte, anche gli studenti meno brillanti in matematica hanno avuto modo di contribuire apportando contributi di altro genere e sicuramente ciò li ha fatti sentire importanti e li ha gratificati. Va notato che, sebbene il 76% ritenga che i compagni di classe abbiano lavorato come e quanto loro, c'è una piccola percentuale, ma forse anche la più obiettiva, che ha saputo notare delle differenze ed evidenziarle: c'è un 12% che ritiene di aver lavorato più degli altri (soprattutto quando si trattava di apprendere dei contenuti, e questa percentuale fa riferimento agli studenti più bravi in matematica) e un 12% che ritiene di aver lavorato meno degli altri (e fra essi c'è uno dei due studenti che non ha partecipato alla fase di preparazione del laboratorio).

Rispetto alla precedente edizione di "La matematica dei ragazzi", alla quale ho partecipato con un'altra classe, devo dire che l'atteggiamento di questo gruppo è stato totalmente diverso: certamente l'edizione scorsa era la prima esperienza anche per me e con questa classe c'è molto più affiatamento, ma questi studenti, rimarcando il loro carattere, hanno veramente costruito il laboratorio di propria iniziativa, ricorrendo al mio aiuto dove i concetti matematici lo richiedevano e, diversamente, spiegandomi come avevano strutturato il laboratorio quasi fossi anch'io un visitatore.

Dal punto di vista organizzativo, la mia funzione durante la fase di preparazione è stata solo quella di dare chiarimenti sulle modalità della manifestazione, procurare i cartoncini, i pennarelli, fare fotocopie e... calmare qualche studente troppo puntiglioso!

Lo svolgimento della manifestazione

I ragazzi della I A hanno partecipato a entrambe le giornate della manifestazione. Durante la prima giornata, la tensione era piuttosto alta: in questa occasione, però, ho notato con piacere che uno dei due studenti che non aveva affatto preso parte alla fase preparatoria si è ritagliato un suo spazio all'interno di una postazione, partecipando così in maniera attiva. Egli stesso poi ha addirittura spiegato in francese ad alcune insegnanti, ospiti presso la Scuola *"Media Divisione Julia"* per il progetto *Comenius*, quale fosse l'obiettivo del nostro laboratorio e come avessimo organizzato il tutto.

La presenza, in qualità di visitatori, di specializzandi della SSISS e di studenti dei Corsi di laurea in Matematica e in Scienze della Formazione Primaria ha creato una certa preoccupazione: subito, però, la classe ha incaricato uno degli studenti più brillanti di *"occuparsi dei grandi"*, in modo che gli altri potessero essere più sereni e non sentirsi esaminati.

Anche durante la fase di spiegazione gli studenti sono riusciti a gestire bene la suddivisione dei compiti: gli studenti più estroversi (e non necessariamente i più bravi) presentavano l'argomento dal punto di vista teorico, gli autori dei modelli fisici mostravano in fase di laboratorio come essi funzionassero e gli studenti più timidi e riservati si dedicavano ad aiutare gli studenti visitatori nella attività di laboratorio.

La seconda giornata è stata molto più disordinata e meno organizzata: i ragazzi avevano già capito che le soddisfazioni più belle c'erano quando i visitatori erano bimbi della scuola elementare o media: la mattinata di venerdì prevedeva la visita di molte scolaresche delle scuole superiori, generalmente molto meno interessate e disponibili a un apprendimento collettivo.

In effetti, dal questionario è emerso che il 70% degli studenti ha lavorato meglio con i visitatori della scuola elementare, il 17% con quelli della scuola media e solo il 4% con gli studenti della scuola superiore. Solo due studenti hanno differenziato i motivi per cui preferivano lavorare con gli uni piuttosto che con gli altri. In particolare, una studentessa piuttosto brava ritiene di non aver lavorato meglio con alcuna tipologia di visitatori in quanto l'argomento era, secondo la sua opinione, troppo difficile per gli studenti della scuola elementare[3] e, nel caso dei visitatori delle scuole medie inferiori e superiori, le sue sensazioni variavano da classe a classe. Un altro studente, che si occupava di verificare l'inverso del Teorema di Pitagora, ha apprezzato gli studenti della scuola elementare perché *ascoltavano interessati*, i visitatori della scuola media inferiore perché *ascoltavano abbastanza e capivano abbastanza* e infine i suoi coetanei e non della scuola superiore perché *capivano*. Certamente, in questo secondo caso, lo studente stabilisce di aver lavorato meglio con chi gli ha dato la maggior soddisfazione, mentre la studentessa precedente ha una visione meno emotiva e più obiettiva del proprio interagire con i visitatori.

Ciò che invece sembra anomalo, analizzando il questionario, è che il 65% degli studenti non ritiene di aver avuto difficoltà durante la spiegazione: fra essi vi sono anche studenti che solitamente hanno notevoli difficoltà nell'esprimersi e nel formulare un discorso organico su argomenti di matematica e studenti che hanno partecipato *in sordina* all'attività di laboratorio durante le giornate della manifestazione. Il restante 35% invece è costituito da ragazzi per lo più con una certa dialettica, che riescono a organizzare un discorso anche di carattere matematico con una certa disinvoltura: uno di essi ritiene di non essere riuscito a spiegarsi bene, un'altra studentessa ha individuato le proprie difficoltà nel fatto che i ragazzi visitatori non capivano; un altro studente, piuttosto timido e riservato, non riusciva a coinvolgere gli studenti ospiti; un altro ha trovato molto difficile e faticosa la prima spiegazione data; per un altro ancora la difficoltà consisteva nel fatto che non sempre l'attività di laboratorio da lui proposta aveva esito positivo; per la maggior parte di loro la difficoltà era, però, da attribuirsi al poco interesse dimostrato dai ragazzi visitatori, e quindi, aggiungerei, anche al problema di motivarli e coinvolgerli.

Mi sembra interessante notare che fra questa percentuale vi è uno studente molto bravo e appassionato di matematica che non ha ritenuto questa una reale difficoltà, perché il poco interesse dimostrato dai visitatori non costituiva di fatto una difficoltà per lui. In un secondo momento, lui stesso avrebbe rivelato *che, nonostante questa esperienza sia stata estremamente positiva, gli ha fatto capire che non farà mai l'insegnante!*

In ogni caso, nel relazionarsi con gli studenti visitatori certamente la timidezza è stata la difficoltà più grossa da superare: il 73% ha coscienza del fatto che paura e timidezza hanno loro impedito di esprimersi al meglio. E ciò è forse alla base del perché gli studenti delle scuole elementari sono stati gli interlocutori preferiti, per il loro interesse, per l'entusiasmo dimostrato.

L'83% degli studenti ritiene che vi sia stato uno spirito collaborativo durante le giornate della manifestazione; gli studenti più critici hanno notato che, in effetti, non tutti hanno collaborato nelle modalità in cui avrebbero dovuto e con continuità, tanto che, mentre l'87% ritiene che tutti abbiano lavorato in ugual modo e misura, c'è un 9% che ha notato di aver lavorato più degli altri e solo un 4% che ammette di aver contribuito molto meno degli altri. In ogni caso, un solo studente ritiene che il suo lavoro non sia stato apprezzato (perché gli studenti non erano interessati), mentre gli altri ritengono che il loro lavoro sia stato apprezzato in primis dai visitatori (47%), poi dai compagni (29%) e infine dall'insegnante (24%). Quest'ultimo dato mi ha fatto piuttosto riflettere in quanto ritengo che comunicare l'apprezzamento per il lavoro dei propri studenti, nella misura e in base alle capacità che ognuno di essi ha, sia fondamentale per stimolarli, incoraggiarli e motivarli.

I ragazzi si sono altresì resi conto che un'esperienza di questo tipo mette in gioco anche abilità e competenze comunicative, organizzative, ecc. diverse da quelle che solitamente si manifestano in classe: il 37% ha scoperto di avere capacità creative e ciò è significativo del fatto che troppo spesso viene lasciato poco margine all'iniziativa individuale nello svolgimento delle attività curricolari.

Al rientro a scuola, inoltre, la classe ha voluto discutere della manifestazione, non tanto dei contenuti trattati, quanto dell'atteggiamento degli studenti visitatori e dei loro insegnanti. Va detto che la classe è generalmente piuttosto critica nei confronti di quanto viene a essa proposto e delle attività che viene invitata a svolgere: ciò è secondo me piuttosto positivo, perché spesso dal confronto con gli studenti si riesce a calibrare meglio un'attività, a scegliere percorsi diversi da quelli premeditati, a organizzare tempi e modalità in maniera più efficace.

Durante la manifestazione, gli studenti più brillanti e, al contempo, più disponibili verso gli altri hanno subito osservato come il loro obiettivo, come studenti relatori, cambiasse a seconda dell'età degli uditori. Con le classi di scuola elementare e media lo scopo era trasmettere contenuti e aiutare a svolgere le attività di laboratorio: tali studenti visitatori erano partecipi e interessati, ma talvolta gli argomenti presentati erano piuttosto difficili da capire. Con le classi delle scuole superiori l'obiettivo era, invece, quello di attrarre la loro attenzione e di far svolgere loro le schede preparate per il laboratorio: gli studenti della scuola superiore, infatti, si erano dimostrati abbastanza disinteressati e svogliati e, sebbene avessero gli strumenti per capire quanto veniva loro spiegato, raramente ciò è accaduto.

Gli studenti hanno notato che l'atteggiamento degli insegnanti accompagnatori delle classi variava: i ragazzini più piccoli erano seguiti e incoraggiati dagli insegnanti a chiedere chiarimenti e a partecipare attivamente alla fase di laboratorio, anche se l'insegnante accompagnatore non era l'insegnante di matematica. Spesso e volentieri, invece, gli studenti di scuola superiore facevano rumore e non prestavano attenzione, senza che il loro insegnante si curasse di intervenire.

La quasi totalità dei ragazzi ha affermato che ripeterebbe volentieri l'esperienza, ma preferirebbe che la fase progettuale si svolgesse in orario curricolare: venire a scuola nei pomeriggi per 2 o 3 ore, organizzare lo studio domestico e le altre attività cui singolarmente gli studenti prendono parte, è stato molto faticoso.

Tutti hanno ammesso che è molto più difficile studiare un argomento che non è stato precedentemente spiegato dall'insegnante, ma per la gran parte di loro lo studio collettivo facilita l'apprendimento; certamente gli studenti più brillanti in matematica, abituati a una rivisitazione personale di quanto viene loro proposto anche curricolarmente, hanno trovato la cosa più semplice, l'impegno per spiegare ai compagni eventuali cose non capite li ha costretti, però, a uno sforzo di chiarezza che solitamente non viene loro richiesto.

Alcuni ragazzi hanno anche osservato che il reperimento di materiale in rete non è stato sempre così banale: le informazioni che si trovano sono moltissime, non sempre ben presentate e organizzate, e talvolta le fonti sono imprecise. Gli stessi studenti hanno trovato molto più semplice il reperimento di informazioni e contenuti attraverso libri di testo e non.

Osservazioni a lungo termine

Per mancanza di tempo, non è stato possibile effettuare un test di verifica nel mese di maggio dell'anno scolastico 2003/2004: alla fine dell'anno scolastico, la classe è stata invitata a rispondere a un questionario di verifica sui contenuti e a uno sugli aspetti emozionali (di cui si è trattato nella precedente sezione) e, all'inizio dell'anno scolastico 2004/2005, ha ripresentato il laboratorio a un'altra classe seconda del nostro istituto, anch'essa sperimentale PNI.

Quando la classe ha riproposto, nel mese di ottobre, il laboratorio a un'altra classe del nostro istituto, ho notato con piacere che, a parte tre studenti (i cui risultati in matematica sono mediamente inferiori agli standard richiesti), il resto della classe aveva fatto propri gli argomenti trattati. Quasi il 40% degli studenti è riuscito a spiegare con parole proprie la differenza fra un numero razionale e uno irrazionale, pensando alle successioni di approssimazioni superiori e inferiori che avevano costruito durante il laboratorio.

Prima di ripresentare il laboratorio, abbiamo dedicato un pomeriggio a riorganizzare le idee. Alcuni studenti hanno proposto di correggere il loro discorso, con l'intento di far partecipare di più la classe in visita, altri avrebbero voluto addirittura introdurre dei test di controllo per essere certi di essere ascoltati!

Mentre la prima richiesta è stata ben volentieri accettata, la seconda era, a mio parere, fuori luogo: era loro compito trovare una strategia per attrarre l'attenzione dell'uditorio.

Gli obiettivi relativi ai contenuti sono stati ritenuti, all'inizio dell'anno scolastico successivo, raggiunti.

Anche gli obiettivi di tipo trasversale sono stati considerati raggiunti dal gruppo classe: il ripensamento fatto quest'anno, non tanto sul *cosa dire*, ma sul *come dire*, li spinge tuttora, sia quando formulano dei quesiti, sia quando rispondono a delle domande, a cercare di esprimersi in modo chiaro e con linguaggio appropriato.

Nel mese di maggio dell'anno scolastico 2004/2005, poi, è stata proposta una verifica sui contenuti, sia su quelli trattati nel laboratorio, sia su quelli studiati curricolarmente nel secondo anno[4], verifica che aveva lo scopo di indagare sulla comprensione del percorso fatto.

La quasi totalità degli studenti conosce il Teorema di Pitagora e lo sa enunciare con correttezza di linguaggio. Più della metà di essi sa fornirne una dimostrazione[5], e riesce anche a generalizzare il teorema in modo corretto. Lascia invece piuttosto stupiti che, nonostante siano stati ristudiati in classe i triangoli rettangoli con angoli di 45° e i triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°, solo lo studente che presentava queste immediate conseguenze del Teorema di Pitagora durante la manifestazione se ne sia ricordato. Per quel che riguarda le terne pitagoriche, il 72% sa che le può ottenere come multipli della terna (3, 4, 5), quasi la metà della classe sa che si possono generare a partire da due numeri naturali e, fra essi, più della metà ricorda anche le formule che generano le terne. La quasi totalità degli studenti sa utilizzare l'inverso del Teorema di Pitagora e se ne serve per verificare se un triangolo è o non è rettangolo. Certamente più frammentarie e imprecise sono le conoscenze che gli studenti hanno dimostrato di avere relativamente all'algoritmo di Erone: l'88% sa qual è la media aritmetica fra due numeri, il 48% sa qual è la loro media geometrica e il 44% sa qual è la maggiore fra le due, cosa che sta alla base del funzionamento dell'algoritmo di Erone. Alcuni studenti sanno spiegare con parole proprie, in modo corretto, a cosa serva l'algoritmo e su cosa si basi il suo funzionamento. E ciò, secondo me, è indicativo del fatto che solo uno studente su 25 abbia descritto il numero irrazionale tramite le successioni di irrazionali che formano classi separate e contigue. La maggior parte della classe sa che un numero irrazionale è un numero decimale illimitato non periodico e che può essere approssimato per eccesso e per difetto da successioni di numeri razionali.

Alla luce dei risultati del secondo questionario proposto, ho discusso nuovamente con la classe del percorso che ho voluto seguire, percorso iniziato con la partecipazione a "La matematica dei ragazzi" e conclusosi alla fine del biennio di studi. In effetti, alcuni di essi hanno affermato di aver, in questa verifica, commesso l'errore di separare quanto appreso durante la preparazione e progettazione del laboratorio e quanto invece è stato studiato curricolarmente. Altri invece hanno ammesso di non ricordarsi molto bene i dettagli del percorso seguito (che, a mio avviso, avevano invece ricostruito bene), ma sapevano dove reperire il materiale e le informazioni necessarie.

Hanno però ribadito, a distanza di un anno, che ripeterebbero volentieri l'esperienza, perché si sono divertiti, hanno lavorato con i compagni di classe[6], perché è stato un nuovo modo, collettivo, informale di apprendere la matematica. Forse che i pranzi saltati, i rientri a casa in tardo pomeriggio e i compiti da fare la sera e la fatica di cui essi erano ancora memori all'inizio di quest'anno scolastico siano svaniti ripensando a un'avventura che, alla fine dei conti, li ha resi protagonisti del loro apprendere? Scrive una studentessa:

> Ancora oggi teniamo in classe i cartelloni che avevamo fatto! Ormai sono rovinati, un po' rotti e un po' bucati dai chiodi, ma ogni volta che li guardo mi viene da sorridere...
>
> CATERINA

NOTE

* Liceo Scientifico Statale
"G. Galilei", via Mameli, 4,
I-34100 Trieste
e-mail: pao.ga@libero.it

1 Molto materiale è stato reperito presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Trieste, in collaborazione con il Nucleo di Ricerca Didattica.

2 Il questionario è stato compilato da tutti i 25 studenti partecipanti al progetto. Poiché due studenti non hanno partecipato alla manifestazione in quanto assenti per malattia, la parte del questionario relativa allo svolgimento della manifestazione è stata compilata da 23 studenti su 25.

3 Questa studentessa doveva presentare l'algoritmo di Erone per il calcolo di $\sqrt{2}$.

4 Gli studenti, a questo punto del biennio, hanno studiato i teoremi sulle equivalenze – e quindi la dimostrazione del Teorema di Pitagora attraverso il I Teorema di Euclide – e hanno già completato lo studio dei numeri reali, con l'introduzione dei numeri irrazionali.

5 Alcuni studenti hanno riproposto la dimostrazione presentata al laboratorio e altri quella studiata nel programma curricolare che utilizza il I Teorema di Euclide.

6 Per quasi tutti gli studenti partecipare a questo progetto ha modificato in meglio il rapporto con i propri compagni; solamente per un numero esiguo di studenti l'esperienza non ha modificato il proprio relazionarsi in classe: va detto che di questi ultimi quattro sono studenti con un'ottima capacità di relazionarsi, molto aperti e disponibili, mentre uno solo è uno studente con poche capacità di scambio e volontà di relazione, tanto che tuttora, alla fine di un biennio passato assieme, non è ben integrato nel gruppo classe e frequenta solitamente studenti di altre classi.

BOYER C.B., 1968, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

BUNT L.N.H., JONES P.S., BEDIENT J.D., *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna.

BURTON D.M., 1985, *The History of Mathematics: an Introduction*, Wm.C. Brown, Dubuque.

GALLOPIN P., 2004a, "Matematica tra i fiumi", in ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 165-182.

GALLOPIN P., 2004b, "Un progetto matematico realizzato in un ambiente non formale: l'apprendimento come evento sociale", in ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 207-221.

KLINE M., 1972, *Storia del pensiero matematico*, vol. I, Einaudi, Torino.

MASINI G., 1997, *Storia della matematica*, Scienza e Storia, SEI, Torino.

SITI WEB

http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/schede.php?id=1

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli/articoli/Pitagora.pdf+dimostrazioni+del+teorema+di+Pitagora&hl=it&ie=UTF-8

http://www.matematicadivertente.com/pitagora.htm

http://www.math.it/cabri/pitagora.htm

http://www.matematicamente.it/cimolin/formula/formula1.htm

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Gen_02/Cap6.html

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Gen_02/Cap8.html

http://www.matematicamente.it/approfondimenti/irrazionali/irrazionali.html

http://www.matematicamente.it/approfondimenti/erone/

http://143.225.237.3/Didattica/Proposte%20e%20questioni%20didattiche/Radice%20quadrata/erone_di_alessandria.htm

parte seconda

La matematica dei ragazzi
Scambi di esperienze tra coetanei

Sesta edizione
Trieste, 30-31 marzo 2006

Programma

Gioco e matematica
Classi I, II e III, Scuola Primaria di Duino-Aurisina (Trieste)
docenti: C. Scheriani, G. Di Pasquale, M. Veggian

A spasso nella logica
Classi II A e II B, Scuola Primaria "F.lli Visintini" di Trieste
docente: E. Onofrio

A colpo d'occhio… giocando con le stime e le misure
Classi III A, III B e II B, Scuola Primaria "V. Giotti" di Trieste
docenti: A. Declich, G. Pellegrini

Non solo interi…
Classi III B e III C, Scuola Primaria "D. Rossetti" di Trieste
docenti: A. Bergamo, D. Varin

Luce
Classe II D, Scuola Media "Divisione Julia" di Trieste
docente: N. Gasparinetti, con la collaborazione di E. Godini

La nostra storia informatica e non solo…
Classi II e III, Scuola Media Statale "Via Roma" di Mariano del Friuli (Gorizia)
docente: G. Candussio

Problemi di ricoprimento e ottimizzazione
Classe II C, Scuola Media "G. Stuparich" di Trieste
docente: C. Passagnoli

Logica del computer e circuiti elettrici
Classe II G, Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste
docente: L. Rossi

Numero irrazionale Φ
Classe II B, Liceo Scientifico "F. Prešeren" di Trieste
docente: J. Santi

A tutto cerchio!
Classe II A, Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste
docente: P. Gallopin

Zero e dintorni
Classe III A, Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana (Udine)
docenti: E. Curci ed E. Matassi

Dove vola l'ape Maia? Viaggio tra i sistemi di riferimento
Classe III, Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia" di Gorizia
docente: L. Mucelli

Descrizione dei laboratori

Gioco e matematica (*C. Scheriani, G. Di Pasquale, M. Veggian*)

Sunto: «L'uomo è veramente tale soltanto quando gioca» (F. Schiller). Attraverso il gioco il bambino esprime le sue idee, condivide, impara e cresce; il gioco è lo strumento attraverso il quale raggiunge le prime, importanti acquisizioni culturali e psicologiche. Il gioco è il suo linguaggio segreto, lo diverte e coinvolge. Per questo motivo, nel laboratorio i bambini hanno rielaborato giochi matematici noti, cercando di condividerli non solo con i compagni e amici, ma offrendoli a persone che non conoscono. I giochi sono fondamentali nella crescita di ciascun bambino e l'idea che i giochi a carattere matematico possano offrire nuove scoperte e opportunità di conoscenze è nata proprio dai bambini. Le classi coinvolte quindi giocheranno con i visitatori condividendo la loro creatività e dimostrando che la matematica divertente esiste e consente di risolvere, in modo piacevole, semplici problemi.
Per bambini e ragazzi da 6 a 8 anni.

A spasso nella logica (*E. Onofrio*)

Sunto: Il laboratorio propone attività e giochi utilizzando le "Forme" o "Blocchi Logici" ideati da Zoltan Dienes. Dal riconoscimento visivo e tattile delle principali forme geometriche e l'identificazione/riconoscimento delle loro caratteristiche, attraverso un percorso di giochi via via più complessi, i bambini incontreranno e potranno esplorare l'uso di simboli e di connettivi logici (non, e). Si potranno così individuare varianti e invarianti, operare classificazioni in base ad uno o più criteri, costruire schemi di classificazione, utilizzare diagrammi e tabelle di vario tipo.
Per bambini e ragazzi da 5 a 10 anni.

A colpo d'occhio... giocando con le stime e le misure (*A. Declich, G. Pellegrini*)

Sunto: Il laboratorio vuole proporre ai visitatori alcune attività a carattere ludico consistenti nella stima e nella successiva misurazione di grandezze fisiche, attraverso strumenti e campioni di misura predisposti dai nostri alunni. Tale laboratorio si articolerà in quattro aree tematiche in cui verranno trattate le unità di misura arbitrarie e convenzionali della lunghezza, del peso, della capacità e del tempo. In ogni area i bambini illustreranno l'esperienza svolta durante l'anno scolastico con l'ausilio di tabelloni preparati da loro; proporranno poi ai visitatori, data una determinata unità di misura scelta come campione, di stimare una grandezza considerata e successivamente di effettuare la misurazione per verificare quanto la stima si sia avvicinata al suo reale valore.
Per bambini e ragazzi da 6 a 11 anni.

Non solo interi... (*A. Bergamo, D. Varin*)

Sunto: Le attività di questo laboratorio intendono avviare all'intuizione del concetto di frazione intesa come parte di un intero, come operatore su grandezze continue e discrete e come numero razionale, partendo da esperienze concrete e da situazioni familiari agli alunni, attraverso attività per lo più manipolative e utilizzando anche situazioni problematiche.
Per bambini e ragazzi da 7 a 10 anni.

Luce (*N. Gasparinetti, con la collaborazione di E. Godini*)

Sunto: Cinque gruppi di ragazzi presentano altrettanti aspetti matematici di argomenti legati allo studio della luce: si parte dalla scomposizione della luce e la combinazione dei colori, si calcolano le diottrie delle lenti di un paio di occhiali, si studia la variazione di luminosità di una lampada al variare della distanza della sorgente di luce dall'osservatore, per arrivare alla costruzione di una curva di crescita di una popolazione di alghe.
Per bambini e ragazzi da8 a 15 anni.

La nostra storia informatica e non solo... (*G. Candussio*)

Sunto: Dalla nostra storia informatica... alla storia dell'informatica. Attraverso il lavoro svolto nella nostra scuola dall'84 ad oggi, vi illustreremo alcune tappe della storia dell'informatica coinvolgendovi in vari percorsi ed esperienze, utilizzando diversi strumenti di calcolo: dalla macchina per il calcolo binario allo Spectrum, dalle calcolatrici grafiche ai più evoluti sistemi attuali, per imparare, capire e anche divertirsi.
Per bambini e ragazzi da 9 a 18 anni.

Problemi di ricoprimento e ottimizzazione (*C. Passagnoli*)

Sunto: Partendo dalla leggenda di Didone, che con l'astuzia e operando con aree e perimetri riuscì ad ottenere un grande appezzamento di terreno per costruire Cartagine, ci si è posti una prima domanda: qual è la forma più conveniente da applicare per ricoprire un'area, sapendo che si ha a disposizione un perimetro ben definito? Una volta indagato e risolto questo problema, è sorta una ulteriore curiosità: perchè la sezione delle cellette delle api è esagonale? Si sviluppano pertanto questi due temi, ricorrendo a plastici e disegni per dimostrare come si possono ottenere soluzioni ottimizzate nel ricoprimento di superfici.
Per bambini e ragazzi da 10 a 16 anni.

Logica del computer e circuiti elettrici (*L. Rossi*)

Sunto: Questo laboratorio mostrerà concretamente come attraverso i circuiti elettrici si possano realizzare somme di numeri in codice binario simulando così ciò che avviene realmente all'interno del computer. Con un percorso che partirà dai numeri binari, si giungerà, attraverso la logica di Boole, a circuiti virtuali e concreti che sommano e moltiplicano bit.
Per bambini e ragazzi da 10 a 18 anni.

Numero irrazionale Φ (*J. Santi*)

Sunto: I ragazzi, divisi in tre gruppi, presenteranno vari contesti in cui si può incontrare il numero irrazionale Φ, toccando così temi legati alla geometria, all'algebra e in generale alle scienze e all'architettura. In particolare verrà presentata la successione di Fibonacci, la sezione aurea e il pentagono regolare. I ragazzi che presenteranno il pentagono regolare partiranno da cenni storici, passando poi alla presentazione delle costruzioni del pentagono regolare, per finire con l'elenco delle caratteristiche specifiche di questo poligono. Il secondo gruppo presenterà la successione di Fibonacci. Questo gruppo si dedicherà al lavoro svolto da Fibonacci, all'illustrazione della successione che prende il suo nome, per poi toccare le varie caratteristiche scoperte nei secoli su tale successione. Un terzo gruppo presenterà la sezione aurea in generale, iniziando dalla definizione, per poi analizzarne la sua storia.
Per bambini e ragazzi da 9 a 18 anni.

A tutto cerchio! (*P. Gallopin*)

Sunto: Nel laboratorio si affrontano i problemi della misura della lunghezza della circonferenza e del calcolo dell'area del cerchio. Si spiega cosa significa "rettificare la circonferenza", come sia possibile approssimare la lunghezza

della circonferenza attraverso l'uso di poligoni inscritti e circoscritti e si mostra come lo stesso procedimento si può utilizzare anche per approssimare l'area del cerchio. Ciò permette alcune considerazioni sul numero π: irrazionalità di π, π come rapporto fra lunghezza della circonferenza e diametro, π come rapporto fra area del cerchio e quadrato del raggio. Il percorso si chiude sul risultato di Archimede: un cerchio è equivalente al triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza e altezza pari al raggio.
Per bambini e ragazzi da 9 a 18 anni.

Zero e dintorni (*E. Curci ed E. Matassi*)

Sunto: Quando è stato introdotto l'uso dello zero come numero? Chi sono gli artefici di questa straordinaria scoperta? Cosa significa che lo zero è elemento neutro per l'addizione? E ancora: nel mondo della fisica, che significato attribuiamo allo zero assoluto? Qual è il significato filosofico di nulla, vuoto, assenza? Sono solo alcuni degli interrogativi che verranno proposti ai visitatori all'interno di un affascinante viaggio alla scoperta dello zero e della sua storia attraverso la matematica, la fisica, la filosofia. Il laboratorio, articolato su diversi livelli di proposta in relazione all'età dei visitatori, vedrà gli allievi protagonisti di un percorso conoscitivo di avvicinamento al concetto di elemento neutro nella moderna teoria dei gruppi, con riferimenti a operazioni numeriche e non. L'analisi filosofica dei concetti di "assenza" e "vuoto" darà un naturale completamento al percorso proposto.
Per bambini e ragazzi da 14 a 18 anni.

Dove vola l'ape maia? Viaggio tra i sistemi di riferimento (*L. Mucelli*)

Sunto: I ragazzi si propongono di spiegare a bambini di scuola elementare ed a propri coetanei, con la realizzazione di laboratori e giochi didattici, il concetto di sistema di riferimento nel piano e nello spazio, evidenziandone l'importanza e l'applicazione nella quotidianità (dalla necessità di individuare univocamente un punto od un luogo di punti nel piano o nello spazio, a quella di individuare una precisa località su una carta geografica o su una mappa...). Si "viaggerà" tra sistema di riferimento cartesiano e polare, rettangolare e sferico..., passando attraverso un breve *excursus* storico e curiosi quanto sorprendenti riscontri nel meraviglioso mondo della natura, evidenziando i legami che sussistono tra i diversi sistemi di riferimento.
Per bambini e ragazzi da 8 a 18 anni.

I laboratori descritti dagli allievi

Gioco e matematica

Classi I, II, III della Scuola Primaria "G. Carducci" di Duino-Aurisina (Trieste)

Quest'anno le nostre maestre ci hanno proposto di partecipare ad una giornata dedicata alla matematica. Abbiamo iniziato a prepararci da un po' di tempo e l'argomento che tratteremo sarà dedicato ai "giochi". Ci siamo chiesti cosa significhi per noi "giocare" e le risposte sono state tante: divertirci, vincere, star bene con gli amici, non studiare. Poi ci è stato chiesto se i giochi e la matematica hanno qualcosa in comune, beh, veramente qualcosa c'è, ma non vogliamo anticipare nulla.

Parteciperemo in tre classi: noi, di classe terza (siamo i più grandi e responsabili) avremo una mattinata tutta nostra, nel secondo giorno, poi i bambini di seconda e prima che lavoreranno insieme, sono piccoli e faranno cose più semplici. La nostra scuola è tutta un cantiere, ci sono cartoncini colorati dappertutto, ognuno ha dei compiti, il tempo stringe e bisogna finire, dovremo provare a giocare prima noi per poter poi insegnare. Qualcuno ha un po' paura mentre altri dicono di no, ci sarà molta gente che verrà a vederci e lavorerà con noi. Noi ora stiamo lavorando con giochi facili e difficili, stiamo costruendo una Torre di Hanoi grande, i quadrati magici e tante altre cose. Tutto il mese di marzo sarà impegnativo dovremo studiare tutte le possibili domande delle persone che verranno. Le maestre ci aiutano e spesso decidiamo insieme come preparare le cose. Facciamo molte lezioni di matematica ed ora ci sembrano più interessanti ed importanti, vorremmo sapere il più possibile, perché per partecipare a queste giornate bisogna essere "matematici speciali", qualcuno ha detto che non ce la fa ma poi abbiamo discusso insieme e abbiamo deciso che tutti possono provare, basta impegnarsi un po'.

A spasso nella logica

Classi II A e II B della Scuola Primaria "Fratelli Visintini" di Trieste

Ciao bambini che venite a visitare il nostro laboratorio! Vi vogliamo presentare i "Blocchi logici": hanno FORME diverse e COLORI molto belli, possono essere GRANDI oppure PICCOLI, GROSSI oppure SOTTILI. Noi li usiamo per fare tanti giochi divertenti che vogliamo mostrare anche a voi.

Un gioco è quello di ricoprire un disegno che abbiamo preparato, pescando le forme giuste dalla scatola magica; poi dovrete portare a spasso i blocchi nella "CITTÀ DELLE FORME", rispettando tutti i segnali e registrarli all'anagrafe dei blocchi costruendo la loro CARTA DI IDENTITÀ.

Vi faremo conoscere anche il "SERPENTE UNA DIFFERENZA", provare il "SUDOKU DELLE FORME" e giocare a "TROVA LA COPPIA". Per noi sono giochi fantastici.

VI ASPETTIAMO E BUON DIVERTIMENTO!!!!!!!

A colpo d'occhio… Giocando con le stime e le misure

Classi III A, III B e II B della Scuola Primaria "V. Giotti" di Trieste

Noi siamo i bambini delle classi seconda B e terze A e B della scuola elementare "V. Giotti". In tutti questi mesi abbiamo lavorato molto per preparare il nostro laboratorio. Abbiamo misurato tante cose, abbiamo pesato degli oggetti, abbiamo fatto degli esperimenti con l'acqua e dei giochi con il tempo. Per questo motivo le maestre ci hanno spiegato il significato di capacità, peso, tempo e lunghezza.

Lavorando insieme, ci siamo preparati per organizzare dei giochi rivolti ai bambini e ai ragazzi, che verranno a visitare il nostro laboratorio nelle giornate del 30 e 31 marzo. Noi saremo divisi in 4 gruppi e ogni gruppo proporrà delle attività diverse: uno sulle lunghezze, uno sul peso, uno sulle capacità e uno sul tempo. Le maestre ci hanno spiegato che ogni 20-25 minuti arriveranno dei bambini di varie scuole e noi dovremo spiegare a loro cosa devono fare. Siamo tutti molto emozionati, perché per la prima volta ci metteremo al posto dei nostri maestri.

Siamo felici di prendere parte a questa esperienza e siamo sicuri di presentare delle cose divertenti, definite da noi addirittura "stupende".

Non solo interi…

Classi III B e III C della Scuola Primaria "D. Rossetti" di Trieste

Siamo bambini di terza elementare e con la nostra maestra di matematica abbiamo studiato le frazioni. Abbiamo capito che il numero sopra indica quante parti del disegno vanno colorate e il numero sotto rappresenta in quante parti è stato diviso. Abbiamo capito anche un problema molto difficile, di 2 focacce divise tra 3 bambini, e la nostra maestra ci ha detto che la soluzione che abbiamo trovato noi era proprio quella degli antichi Egizi. Ci siamo divertiti a travasare le bottiglie e vedere quanti succhi di frutta occorrevano per riempire una bottiglia da un litro. Venite a trovarci e scoprirete tante cose sulle frazioni.

Luce

Classe II D della Scuola Media "Divisione Julia" di Trieste

I colori della luce: usando una lampada puntata contro il prisma e dei cristalli giocheremo con la luce, scomponendola nei sette colori dell'arcobaleno. Con alcuni cartoncini colorati potremo poi osservare cosa succede se invece mescoliamo questi colori.
Crescita delle alghe: la nostra alga (*Dunaliella*) per crescere non ha bisogno di …Kinder Choco Pops… ma di luce e brodo di coltura. Così, un bel giorno… ve la troverete nel piatto per pranzo!!! Se visiterete il nostro laboratorio saprete la ricetta e gli ingredienti! Ma come si moltiplicano queste simpatiche cellule? Ma dividendosi, ovviamente… come la plastilina: si dividono in due, poi in quattro e ancora… ancora… fino a che il nostro popolo di alghe è grande.

Il nostro gruppo presenterà l'esperimento della coltura di *Dunaliella* con il computer: su *Power Point* scorrerà una vasta gamma di fotografie scattate nel corso dell'esperimento; esso si basa sulla riproduzione delle cellule nel tempo e sul metodo usato per contarle.

Le diottrie: noi siamo qui per mostrarvi come si calcolano le diottrie con il banco ottico e vi spiegheremo la rifrazione con un esperimento: metteremo una candela sotto una lente che, a sua volta, è sotto un *becher*; alla fine si vedrà la fiamma della candela riprodotta sullo schermo del banco ottico (che è sopra il *becher*…) e vedrete tanti nostri disegni.
Una luce da lontano: a mano a mano che ci si allontana dalla luce essa è più debole… vi presenteremo l'attrezzatura con i dati raccolti e dovrete scoprire se sotto sotto c'è una legge matematica!

La nostra storia informatica e non solo…

Classi II e III della Scuola Media "Via Roma" di Mariano del Friuli (Gorizia)

L'anno scorso abbiamo iniziato la nostra esperienza riguardante la storia dell'informatica e in particolare quella della nostra scuola e abbiamo anche allestito un piccolo museo dei computer adoperati nella nostra scuola dal 1984 ad oggi. A Trieste metteremo in funzione uno dei vecchi computer: lo *Spectrum 48k*.

Con esso e con un apposito software che simula lo *Spectrum* abbiamo creato dei programmi di gioco, di calcolo e messo in risalto le diversità e le difficoltà di impiego in confronto ai computer odierni.

Illustreremo brevemente le principali tappe della storia dei computer e il loro funzionamento attraverso cartelloni, presentazioni in *Power Point*, semplici circuiti elettrici, una particolare macchina da calcolo che utilizza la numerazione binaria (che è alla base del funzionamento di tutti i computer) imprestataci gentilmente dal prof. Corrado Bonfanti. Inoltre parleremo del linguaggio BASIC (che permette di tradurre le istruzioni e i comandi nella combinazione binaria corrispondente) e del codice ASCII (riguardante i caratteri). Per completare la nostra storia si presenteranno anche alcuni lavori fatti con le calcolatrici grafiche e relativi sensori (anidride carbonica) e altre elaborazioni eseguite con particolari programmi.

Ci organizzeremo in quattro gruppi:

- il primo illustrerà il lavoro svolto riguardante la storia generale e il museo,
- il secondo quello riguardante il funzionamento dei computer (la numerazione binaria, i circuiti, i codici) e della macchina da calcolo funzionante in base alle regole dell'aritmetica binaria,
- il terzo quello sullo *Spectrum* con esempi di semplici programmi in *Basic*
- ed infine il quarto quello sulle calcolatrici grafiche e altre elaborazioni.

Consigliamo agli ospiti (dalla 4ª elementare in su) di iniziare la visita dal primo gruppo, liberi quindi di proseguire il giro secondo l'ordine da essi prescelto. Le spiegazioni ai visitatori verranno fornite tenendo conto della loro età.

Problemi di ricoprimento e ottimizzazione

Classe II C della Scuola Media Statale "G. Stuparich" di Trieste

Quest'anno parteciperemo alla Matematica dei ragazzi. Abbiamo iniziato cercando informazioni su Didone che per fondare la sua città, Cartagine, ha scoperto che con il cerchio si occupa la maggior area con lo stesso perimetro. Così ricevuta una pelle di bue dal re Jarba, siccome poteva prendere tanto terreno «*quanto ne poteva contenere una pelle di bue*», Didone tagliò a strisce la pelle e posizionatasi sulla costa dispose le strisce a semicerchio ed ottenne anche lo sbocco sul mare. Medesima scoperta hanno fatto i bombi che, con la cera, creano le loro cellette con sezione a forma di cerchio. Le api però non sono d'accordo. Esse infatti fanno le cellette con sezione esagonale! È per questo che partecipiamo a questa attività: per scoprirlo e per comunicarlo agli altri.

L'ape avrebbe una vasta scelta di forme con cui fabbricare la propria cella: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono. Ma perché ha scelto di fare degli esagoni? Perché essi ricoprono la maggior area con lo stesso perimetro senza lasciare spazi vuoti e questo lo possiamo dimostrare con il teorema di Pitagora.

Per spiegarlo meglio alle altre classi stiamo preparando anche dei cartelloni e un plastico e per spiegarlo ai bambini delle elementari stiamo pensando di usare uno spago e della gommapiuma o del polistirolo.

Logica del computer e circuiti elettrici

Classe II G del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste

Nel corso della sua storia, l'uomo ha sempre dovuto districarsi fra le quattro operazioni ed ha sfruttato il suo ingegno per ampliare in questo campo le proprie conoscenze.

All'inizio c'erano gli abachi, ma la prima vera calcolatrice venne costruita da Blaise Pascal nel 1645, e chiamata per questo motivo la "pascalina", che era in grado di compiere semplici addizioni e sottrazioni. Per avere delle applicazioni pratiche dell'uso dei calcolatori bisogna aspettare l' '800, periodo in cui venne introdotta la prima macchina automatica, che non era altro che un semplice telaio, all'interno del quale potevano essere introdotte delle schede forate per la riproduzione di un determinato disegno. Finalmente poi arrivò l'algebra del signor Boole a risolvere la situazione e grazie a lui, dopo la Prima Guerra Mondiale si poté costruire un modello astratto di macchina automatica e predisporne il comportamento logico.

La Seconda Guerra Mondiale segnò diverse svolte tristi nell'Europa di quegli anni, però fu anche un'epoca d'oro per lo sviluppo dei calcolatori a partire da quelli di serie Z, per opera dello scienziato nazista Konrad Zuse. Qualche anno dopo vennero costruiti i primi computer ENIAC, dispositivi che occupavano quasi 200 metri quadrati e che inaugurarono la prima generazione di computer.

Dagli anni '50 l'industria informatica è andata sempre più evolvendosi, con l'introduzione prima dei transistor, e la conseguente diminuzione del volume delle macchine, e poi con la produzione dei *software* e dei *chip*. Oggi abbiamo ormai raggiunto la V generazione, siamo in grado di sviluppare intelligenze artificiali capaci di acquisire esperienza.

Questo è il lungo percorso dell'informatica che ci porta fino ai nostri giorni, che ci fa navigare in internet, trovare informazioni, eseguire dei lavori anche di grande responsabilità e difficoltà con dei semplici *click*. Pur essendosi trasformato profondamente, il computer ha però mantenuto nella sostanza la stessa logica: tutti i dati, tutte le istruzioni sono registrate in codice binario e i circuiti che elaborano queste informazioni binarie lo fanno ancora basandosi sulla logica di Boole. A questo proposito, la II G del Liceo Scientifico "Galileo Galilei" cercherà di entrare con voi all'interno del computer mostrandovi in che modo con dei circuiti elettrici sia possibile addizionare, moltiplicare dei *bit*.

Speriamo che anche voi possiate appassionarvi a questo mondo fatto di fili elettrici, lampadine, circuiti virtuali, tavole di verità, porte logiche e un'infinità di uno e di zeri.

Numero irrazionale Φ

Classe II B, Liceo Scientifico "F. Prešeren" di Trieste

Frequentiamo il secondo anno del Liceo scientifico con lingua d'insegnamento slovena "France Prešeren" di Trieste. Alla manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei" abbiamo deciso, insieme alla nostra insegnante, di presentare dei laboratori sul numero irrazionale Φ, toccando temi legati alla geometria, all'algebra e in generale alle scienze e all'architettura.

Dopo una consultazione, considerato che gli argomenti da presentare sono tanti, abbiamo deciso di dividerci in tre gruppi, ciascuno composto da tre alunni. Il primo gruppo composto da Tanja, Matteo e Milan presenterà la successione di Fibonacci, e spiegherà ad esempio come essa è presente anche in natura. Alla fine illustrerà come questa successione sia correlata al numero irrazionale Φ. Il secondo gruppo composto da Jakob, Benjamin e Vasil parlerà dei problemi matematici che portano all'introduzione del rapporto Φ e della sezione aurea in generale. L'ultimo gruppo composto da Daša, Marko e Janoš presenterà il pentagono regolare e il legame di esso con il numero irrazionale Φ.

I laboratori saranno rivolti agli alunni delle elementari, ma anche agli studenti delle medie e delle superiori, perciò stiamo tentando di semplificare il più possibile i contenuti così da renderli accessibili anche ai bambini più piccoli.

L'esperienza che stiamo vivendo è molto gratificante perché ci permette di interagire tra di noi più del solito, di svolgere del lavoro di ricerca e di lavorare in gruppo. Inoltre ci dà la possibilità di interessarci a temi matematici di grande interesse e mistero. Ma soprattutto ci piace l'idea che alla fine avremo la possibilità di interagire con bambini ed alunni di altre scuole presentando loro quanto da noi appreso durante l'anno scolastico.

Inoltre questa esperienza si è rivelata educativa, perché attraverso essa abbiamo imparato a parlare di matematica in italiano, che non è la nostra lingua d'insegnamento e ci ha così permesso di ampliare il nostro bagaglio di conoscenze linguistiche.

A tutto cerchio!

Classe II A del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste

Il nostro laboratorio si propone di spiegare con semplicità come si calcola la lunghezza di una qualsiasi circonferenza e l'area di un qualsiasi cerchio.

Abbiamo organizzato il lavoro in tre parti fondamentali:

- Lunghezza della circonferenza
- Area del cerchio
- Equivalenza fra area del cerchio e area di un particolare triangolo, dovuta ad Archimede

Il primo gruppo si occupa del problema della rettificazione della circonferenza e si propone, utilizzando poligoni regolari inscritti e circoscritti, di far capire come, aumentando il numero dei lati di queste figure piane, sia possibile approssimare con sempre maggior precisione la lunghezza della circonferenza.

Il secondo gruppo spiega come, utilizzando sempre poligoni regolari inscritti e circoscritti sia possibile anche approssimare l'area di un cerchio. Ci si pone anche la domanda di cosa sia π e di come si possa definirlo.

Il terzo gruppo espone in modo semplice ed immediato il risultato che si deve ad Archimede per calcolare l'area di un cerchio attraverso un triangolo ad esso equivalente.

Buon divertimento!!!

Zero e dintorni

Classe III A del Liceo Scientifico "E. L. Martin" di Latisana (Udine)

Benvenuti a tutti!!!
Noi siamo la III A del Liceo Scientifico "E. L. Martin" di Latisana e la nostra classe è formata da dieci ragazzi e da quattro ragazze (povere noi, siamo in minoranza!). Siamo qui per presentarvi il nostro laboratorio denominato "Zero e dintorni", un affascinante viaggio alla scoperta dello zero e della sua storia. Non spaventatevi! Non terremo una lunga e noiosa conferenza su questo tema, ma cercheremo di coinvolgervi e di attrarre la vostra attenzione.

Il laboratorio si articola in quattro "tappe" corrispondenti ad altrettanti percorsi di avvicinamento al tema dello zero:

- la scoperta dello zero e la storia del suo utilizzo nel corso dei secoli;
- lo zero come elemento neutro nella teoria dei gruppi;
- lo zero assoluto in fisica;
- il concetto di zero, inteso come nulla-essenza, dal punto di vista filosofico.

Noi vi assicuriamo che l'argomento è molto interessante perché anche noi ci siamo divertiti a preparare tutti insieme questo laboratorio! La nostra speranza è di non annoiarvi e ci aspettiamo naturalmente la vostra collaborazione che renderà sicuramente tutto più piacevole e costruttivo!

Buon divertimento!!!

Dove vola l'ape Maia? Viaggio tra i sistemi di riferimento

Classe III del Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia" di Gorizia

Durante quest'anno scolastico noi, alunni della III del Liceo Linguistico Europeo Paolino d'Aquileia, abbiamo affrontato, assieme alla nostra insegnante di matematica, lo studio della geometria analitica, e per la prima volta ci siamo anche accostati alla fisica!

Già l'anno scorso avevamo iniziato a rappresentare punti nel piano cartesiano. Quest'anno abbiamo imparato a calcolarne le distanze reciproche (ad es. la formula della distanza tra due punti l'abbiamo ricavata usando il teorema di Pitagora), a determinare equazioni di curve in base a determinate condizioni assegnate, a disegnare nel piano cartesiano curve di vario tipo (rette, parabole, circonferenze, ellissi, iperboli…) a partire dalle equazioni (corrispondenza tra equazioni e grafici nel piano cartesiano) ed a cercare poi anche analiticamente le eventuali coordinate dei punti di intersezione tra due curve (cercare le intersezioni tra due curve significa sempre risolvere un sistema), a verificare analiticamente se un punto appartiene ad una curva assegnata (se un punto appartiene ad una curva allora le sue coordinate, sostituite alle incognite, ne soddisfano l'equazione)… Ci siamo presto resi conto che per fare tutto ciò era fondamentale fissare un sistema di riferimento! Altrimenti come individuare univocamente un punto nel piano o nello spazio passando attraverso le sue coordinate?

Anche in fisica abbiamo capito che ad esempio per parlare di spostamento, è sempre necessario specificare rispetto a che cosa ci si sposta, altrimenti è impossibile capire dove si arriva, anche conoscendo eventualmente la direzione dello spostamento e "di quanto" ci si sposta.

Soprattutto all'inizio comunque non è stato facile! E le prime difficoltà sono nate proprio nella fase di rappresentazione dei punti nel piano cartesiano: spesso continuavamo a confonderci, scambiando la x con la y! Così con la nostra insegnante è nata l'idea di partecipare a questa edizione della matematica dei ragazzi proprio affrontando il problema delle rappresentazioni in un sistema di riferimento, evidenziandone l'importanza e l'applicazione nella quotidianità.

Ci siamo così proposti di approfondire l'argomento ma anche di inventare dei giochi e laboratori per far comprendere in modo semplice anche a bambini più piccoli come individuare un punto in un opportuno sistema di riferimento (e chiarire le idee a noi stessi!). Ci siamo così organizzati in laboratori di diverso grado di difficoltà, alcuni rivolti principalmente ai bambini, altri adatti ai ragazzi più grandi. Di seguito proponiamo una breve sintesi dei laboratori che abbiamo ideato.

1. *Battaglia navale nel piano cartesiano*: invece del gioco classico, le navi sono costituite da insiemi di punti nel piano cartesiano.
2. *Dove abita il Signor Rossi?*: in questo laboratorio si invitano i piccoli visitatori a cercare su una piantina di *Tutto Città* l'indirizzo del "Signor Rossi", in base alle coordinate assegnate nella legenda: si sottolinea così un primo semplice caso di utilizzo nella quotidianità di un sistema di riferimento, rappresentato in questo caso da un semplice reticolo geografico. Si passa quindi alla localizzazione di una località sul mappamondo, introducendo le coordinate geografiche.
3. *Dove vola l'ape Maia?*: si espone il fatto che il sistema di comunicazione delle api è praticamente basato sul sistema di riferimento sferico. Sono infatti in grado di comunicare alle proprie compagne ad esempio l'esatta collocazione

di una fonte di cibo danzando, eseguendo nell'aria dei particolari disegni che indicano la direzione e la distanza esatta che deve esser percorsa per raggiungere il cibo.

4. *I principali sistemi di riferimento e le relazioni che li legano*: si evidenzia come un punto nel piano possa essere univocamente individuato sia assegnando coordinate sferiche sia assegnando coordinate polari, e nello spazio assegnando coordinate rettangolari o sferiche. Si propongono le equazioni (che prevedono l'introduzione delle funzioni seno e coseno) che permettono di passare dalle coordinate in un sistema, a quelle corrispondenti dello stesso punto nel sistema equivalente.
5. *Laboratorio informatico*: si propone l'utilizzo di programmi come *Cabri*, *Derive* ed *Autocad*. *Cabri* e *Derive* vengono utilizzati in questo caso per evidenziare in modo operativo i legami tra grafici e relative espressioni matematiche. Si trae poi spunto da *Autocad*, oltre che per proporre una semplice costruzione tridimensionale da realizzare mediante assegnazione delle coordinate dei punti, anche per fare alcune osservazioni relativamente al ruolo dei sistemi di riferimento nell'ambito del lavoro svolto dai geometri.

Gioco e matematica

Cinzia Scheriani, Giovanna Di Pasquale, Milena Veggian*

Il gioco

Il gioco riveste un ruolo importante nella vita di ciascun individuo, sia esso bambino sia adulto: influisce sulla formazione della personalità e modifica le capacità di apprendimento attraverso l'uso riformulato di strategie risolutive. Dal punto di vista del bambino, il gioco è soprattutto divertimento; tuttavia l'impegno profuso nell'affrontare situazioni particolari lo induce a modificare i propri comportamenti, a utilizzare la creatività e l'opzione ragionata, e a tal proposito va detto che la considerazione dell'adulto nei confronti dei giochi per bambini non è sempre adeguata. Bettelheim (1987) scrive che, attraverso il gioco, il bambino compensa le tensioni della vita quotidiana e dell'inconscio; le attività legate al gioco modificano lo sviluppo intellettivo del bimbo, che, secondo necessità, utilizza schemi mentali preesistenti o ne crea di nuovi. Nascono così capacità, quali la costanza nell'esecuzione di pratiche operative e la capacità di modifica delle azioni. La motivazione è poi la tensione che porta il bambino a impegnarsi nel gioco e a conquistare, passo a passo, piccoli e grandi obiettivi, che possono portare alla vittoria.

Numerosi pedagogisti hanno riflettuto sul ruolo del gioco nella vita del bambino; fra questi ricordiamo Bruner[1], che, nei suoi studi, ha approfondito il legame esistente fra motivazione, gioco e apprendimento.

Perché quindi la scelta di questo laboratorio ha interessato il gioco? Esiste la possibilità di utilizzare il gioco in matematica a fini didattici? La scelta delle docenti è caduta proprio su questa tematica, dopo aver considerato alcune variabili fondamentali:

– La situazione contingente, ossia la realtà particolare della scuola, un piccolo plesso dell'Altipiano Carsico, dove gli alunni delle classi I, II e III sono in tutto 28 e vi è inserito un alunno diversamente abile, che ha portato a termine completamente, con entusiasmo e capacità, il proprio lavoro. In questo contesto, il progetto ha favorito la scelta del gioco quale elemento aggregante e facilitante.

– Il tempo scuola, organizzato in 5 giorni con 2 rientri pomeridiani, che hanno favorito la ricerca in merito agli argomenti trattati e la costruzione dei materiali attraverso l'uso del laboratorio.

– Le competenze degli alunni, in particolare quelle (sicuramente) minime dei bambini della classe prima, che si sono cimentati in un rivisitato e personalizzato "Gioco dell'Oca".

– Gli obiettivi da raggiungere, che rientrano negli OSA (Obiettivi Specifici di Apprendimento) delle Indicazioni Nazionali per la scuola primaria e vengono così espressi attraverso metodologie alternative, nella considerazione che l'attività di costruzione, ricerca e modifica possa fornire nuove modalità di apprendimento.

Il progetto ha riguardato i seguenti giochi: il Gioco dell'Oca, la Torre di Hanoi, l'"Hex" e i "Quadrati magici". Riportiamo di seguito la descrizione dettagliata delle attività riguardanti i primi due.

Il gioco dell'oca

Il Gioco dell'Oca è uno dei primi giochi in cui si cimentano i bambini: originariamente, è composto da sessantatré caselle disposte nel classico percorso a spirale e vi si utilizzano due dadi e alcuni segnaposto; viene giocato da più persone contemporaneamente e viene vinto da colui/colei che giunge prima al traguardo.

Un po' di storia. L'origine del curioso nome è avvolta nel mistero; l'unica certezza è che, già nei primi esempi, sul tavoliere era sempre raffigurata un'oca: una tavola, originaria di Venezia, risale al 1640 e raffigura una mensa imbandita su cui troneggia un'oca, che si pensa potesse rappresentare il premio per il vincitore. Il gioco divenne presto un appuntamento tradizionale a Natale, Pasqua e Carnevale. Vengono attribuiti al Gioco dell'Oca nelle credenze comuni significati esoterici e numerologici. Il Gioco dell'Oca è a tutt'oggi uno dei passatempi più diffusi nel mondo per due motivi: l'estrema semplicità delle regole e l'azzardo contenuto nel gioco, che non lascia al giocatore alcuna via di scampo, se non la propria fortuna e buona sorte nell'affrontare eventuali prove contenute in esso.

Dal punto di vista storico, fonti fanno risalire questo gioco a origini orientali. Un gioco, dal nome *Shing Kunt t'o* (che si può tradurre con "la promozione dei mandarini") datogli anticamente sotto la dinastia Ming (1368-1644), era una "corsa" fatta con dei segnaposto su un tabellone numerato da uno a novantanove; assomigliava quindi al nostro tradizionale Gioco dell'Oca, che sarebbe stato inventato a Firenze verso il 1580 da un ignoto, per conto di Francesco De' Medici e dell'imperatore Filippo II, veri appassionati di numerologia. Il gioco fu comunque creato sicuramente entro il 1587, visto che in quell'anno uscì a Madrid "Filosofia cortesana" di Alonso De Barre, un testo dove si applicava il percorso dell'Oca all'uomo di corte, al fine di migliorare le sue capacità all'interno dei doveri cortigiani.

Il laboratorio. Durante il corso dell'anno scolastico è stato quindi proposto ai bambini il gioco nella sua versione classica, acquistato dai docenti di classe e scelto fra quelli più semplici sul mercato. Per portarlo in un laboratorio a "La matematica dei ragazzi", il gioco è stato poi rivisitato, ridisegnato, ne sono state abolite alcune regole e ne è stato facilitato il percorso, al fine di ottenere, in tempi definiti, la vittoria di un partecipante. Le regole erano state riportate su cartelloni visibili all'entrata del laboratorio (vedi Fig. 1) e venivano spiegate ai partecipanti, che avevano un'età omogenea rispetto ai bambini che presentavano il gioco.

Gli obiettivi di apprendimento. Gli obiettivi specifici di apprendimento scelti dalle docenti erano:
- contare sia in senso progressivo che regressivo;
- esplorare, rappresentare e risolvere situazioni problematiche;
- localizzare oggetti nello spazio fisico, sia rispetto a se stessi, sia rispetto ad oggetti;
- eseguire un semplice percorso, partendo dalla descrizione verbale o da un disegno.

La metodologia. Gli alunni si alternavano in diverse funzioni, e ciascuno a turno rivestiva il ruolo dell'Oca (erano sempre tre le oche che si muovevano sul grande tabellone, contrassegnato con i numeri costruiti dai bambini, e portavano un cappellino a forma di oca e un panciotto nero), quello del controllore (un bambino che controllava i passi), quello della squadra, che poneva le domande ai visitatori, chiedendo il risultato di addizioni e sottrazioni (erano stati preparati cartoncini per le operazioni aritmetiche e le risposte). Tutti quindi erano coinvolti e instancabili. Avevamo previsto di portare i bambini alla manifestazione soltanto nella prima giornata, considerata la loro età; ma i risultati e l'entusiasmo dei bimbi ci hanno fatto cambiare idea, e così abbiamo partecipato in entrambi i giorni. Ricordiamo che tutti i docenti della scuola, anche coloro che non erano in servizio, sono stati presenti e hanno aiutato i docenti e gli alunni coinvolti nel laboratorio.

Il nostro gioco dell'oca conta 39 caselle, non 63 come quelli consueti.
Ne abbiamo fatte meno perché non avremmo saputo dove metterle.

Il gioco non viene fatto gettando i dadi.
Ci sono due o tre pedine viventi, una giuria, i concorrenti.

I bambini hanno scritto le operazioni aritmetiche che devono essere risolte dai concorrenti.
La giuria dirà se le pedine viventi potranno avanzare o indietreggiare.
Vincerà chi per primo raggiungerà il numero 39.
Se il concorrente dovesse superarlo, dovrà tornare indietro.

Figura 1

La Torre di Hanoi

Premessa. Le docenti delle classi seconda e terza hanno scelto di trattare alcuni giochi conosciuti dai bambini e altri mai visti. Ciò ha permesso di iniziare un percorso atto alla costruzione di un gioco e alla sua messa in opera. Poiché era presente un alunno diversamente abile, tutto il lavoro è stato per lui progettato in modo personalizzato, per offrire al bimbo un'occasione speciale per dimostrare le sue capacità e, nel contempo, migliorare la socializzazione e la comunicazione. In quest'ottica le docenti hanno prima utilizzato vari giochi e, solo successivamente, i bambini hanno costruito il loro gioco della "Torre di Hanoi".

Gli obiettivi di apprendimento. Gli obiettivi specifici di apprendimento erano riferiti all'introduzione del pensiero razionale, che per quanto riguarda il primo biennio sono i seguenti:

Linguaggio e terminologie relative a numeri, figure e relazioni.	Raccontare con parole appropriate (ancorché non specifiche) le esperienze fatte in diversi contesti, i percorsi di soluzione, le riflessioni e le conclusioni.
Analisi di analogie e differenze in contesti diversi.	Acquisire consapevolezza della diversità di significato tra termini usati nel linguaggio comune e quelli del linguaggio specifico; in contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative, riconoscere analogie e differenze.

La metodologia. Il gioco è stato dapprima provato dai bambini; sono state condivise le regole che emergevano dal contesto e sono state discusse e accettate nel loro significato. Nella costruzione della Torre di Hanoi, il coinvolgimento è stato totale: nel laboratorio venivano dipinte le scatole di cartone, misurate le distanze fra un piolo e l'altro, tagliati i pioli di legno in modo che potessero reggere dei dischi concentrici. Successivamente sono stati scelti dai ragazzi i materiali più adatti per creare i dischi: dopo vari tentativi, si è deciso per tappetini di gommapiuma, utilizzati solitamente in palestra, e così, con l'uso del compasso, sono stati creati i dischi. Le docenti hanno provveduto a bucarli in modo idoneo e successivamente essi sono stati posizionati nei pioli. La costruzione è stata ripetuta per altri tre giochi. Il laboratorio si è rivelato entusiasmante per i ragazzi, che vedevano uscire dalle loro mani il gioco completo in ogni sua parte.

Le varie partite sono state sempre giocate in coppia per favorire al massimo la condivisione e la socializzazione, e le coppie cambiavano di volta in volta, così da poter valutare quelle meglio assortite.

Un po' di storia e descrizione del gioco. Il problema della Torre di Hanoi deriva da una antica leggenda indiana, che recita così: «*Nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovano 64 dischi d'oro puro che i monaci spostano uno alla volta infilandoli in un ago di diamanti, seguendo l'immutabile legge di Brahma: nessun disco può essere posato su un altro più piccolo. All'inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in un ago e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da un ago all'altro è tuttora in corso. Quando l'ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in un ago diverso, allora arriverà la fine del mondo e tutto si trasformerà in polvere*». Il gioco della "Torre di Hanoi" fu realizzato dal francese Edouard Lucas e venduto come giocattolo nel 1883.

Il gioco si presenta costituito da tre aste, in una delle quali sono infilati alcuni dischi di misura diversa, disposti, partendo dal basso, in ordine di grandezza, dal più grande al più piccolo. Le regole del gioco sono due:

1) si può spostare solo il disco situato sulla sommità di una torre;

2) un disco più grande non può essere posato sopra un disco più piccolo.

Lo scopo è quello di spostare tutti i dischi su un'altra asta, in modo che risultino ancora disposti nello stesso ordine. Il numero minimo di mosse previsto per la soluzione del gioco è indicato sempre per tutti i livelli. In generale, se i dischi sono n, il numero minimo di mosse è $2^n - 1$.

Valutazione del lavoro svolto

Il lavoro a scuola sui giochi ha impegnato i bambini per un lungo periodo e non solo ha suscitato in loro curiosità, legata alla ricerca storica dei giochi e alla costruzione degli stessi, ma ha anche favorito l'interscambio di idee e di esperienze. Nel momento della presentazione del relativo laboratorio ai visitatori nel corso della manifestazione "La matematica dei ragazzi", i bambini sono stati partecipi e coinvolti, affinando così le proprie capacità comunicative, e pazienti nel ripetere più volte le spiegazioni a coetanei mai visti. Le competenze sono sicuramente migliorate in tutti gli aspetti matematici e logici, e il gioco in generale ha poi assunto valenza diversa, riconquistando importanza e attenzione agli occhi dei ragazzi.

NOTE

** Docenti della Scuola Elementare
"G. Carducci", Aurisina Cave, 85,
I-34100 Duino-Aurisina (Trieste)
Riferimento e-mail:
cinziascheriani@virgilio.it

1 Cfr. Bruner et al., 1981

BIBLIOGRAFIA

AA.VV., 2004, *Giochi d'Ingegno*, RBA Fabbri Editori, Milano.

Barra M., 1986, "Gioco, sviluppo, apprendimento, attitudini sociali e matematica", in D'Amore B. (a cura di), 1986, *Gioco e matematica*, Cappelli, Bologna.

Bruner J.S., Jolly A., Sylva K. (a cura di), 1981, *Il gioco: ruolo e sviluppo del comportamento ludico negli animali e nell'uomo*, Armando, Roma.

Rovatti P.A., Zoletto D., 2005, *La scuola dei giochi*, RSC Libri, Milano.

SITI WEB

www.math.it

www.progettopolymath.it

www.vialattea.net

www.wikipedia.org

Matematica e patologie rare

Cinzia Scheriani*

Parlare di insegnamento della matematica in soggetti portatori di handicap non è oggi una novità: ben sappiamo che nell'ultimo ventennio moltissimi sono stati gli approcci diretti in questo senso e molteplici le metodologie facilitanti. In questo quadro si colloca il lavoro fatto da autori di importanza nazionale e internazionale, che hanno voluto riqualificare la didattica della matematica, individualizzandola e personalizzandola nella consapevolezza delle limitazioni dovute alla disabilità.

Già nel testo *Matematica pratica per l'handicappato* (Williams & Ianes, 1984) si affrontavano argomenti della matematica comune, che avrebbero portato il ragazzo a un apprendimento facilitato della disciplina.

Cesare Cornoldi, nella premessa al libro, scrive: «*L'adattamento degli obiettivi a soggetti con difficoltà gravi di apprendimento va di pari passo con l'adattamento alle sequenze didattiche… L'esperienza che l'insegnante trarrà da questo modo di procedere gli servirà, in seconda battuta, per valutare il curriculum, chiosarlo, correggerlo, renderlo più aderente ai propri orientamenti e alle caratteristiche di particolari soggetti*».

Testi successivi e a noi contemporanei esemplificano le procedure e favoriscono, secondo le possibilità del soggetto, un'acquisizione utile, pratica e divertente dei principali concetti matematici. Quale membro del NRD, desidero portare il mio contributo in riferimento a uno dei laboratori presentati all'edizione 2006 di "La matematica dei ragazzi", intitolato "Gioco e matematica", creato da una scuola primaria che ha, al suo interno, un bambino che soffre di una rara patologia, quale la sindrome di Sotos. Facendo riferimento alla letteratura nazionale e internazionale, ritengo opportuno dare una minima spiegazione della patologia in questione.

La sindrome di Sotos è stata descritta per la prima volta nel 1964 dall'americano Juan Sotos ed è stata da lui definita come "Gigantismo Cerebrale" nell'articolo "Cerebral Gigantismus in Childhood", pubblicato sul *New England Journal of Medicine*[1]:

> La sindrome di Sotos, di probabile origine genetica, viene diagnosticata sulla base di caratteristiche cliniche, contraddistinte da una particolare triade: peso alla nascita e lunghezza superiori agli standard, accelerata maturazione scheletrica, ritardo mentale non progressivo a cui si associano altre anomalie non costantemente presenti. Per il momento non ci sono altre possibilità di verificare la diagnosi né con indagini di tipo biochimico, né genetico.

La sindrome di Sotos è rara. Nonostante la lentezza nello sviluppo psicomotorio e i deficit personali, il bambino probabilmente raggiungerà tutte le tappe evolutive, pur con un proprio ritmo.

La causa o le cause della sindrome non sono state ancora chiarite completamente ed è sconosciuta a tutt'oggi l'esatta anomalia cromosomica, non essendo ancora emersa dalle ricerche genetiche compiute.

La letteratura medica indica che la maggior parte dei casi è sporadica, cioè si tratta di eventi genetici unici. I bambini affetti dalla sindrome di Sotos presentano un ritardo variabile dello sviluppo psicomotorio e vengono descritti nella letteratura medica come soggetti caratterizzati da goffaggine e difficoltà di coordinazione, a volte con problemi di linguaggio.

La mancanza di coordinazione va curata molto nel tempo e migliora; va però considerato che le attività che richiedono una buona coordinazione potranno essere padroneggiate solo con un certo ritardo, rispetto ai soggetti di pari età.

Il bambino affetto da tale sindrome impara a correre di solito più tardi degli altri; appare difficoltoso anche il senso dell'equilibrio e il bimbo cade con facilità, se si trova su una superficie non liscia oppure quando si gira. I miglioramenti, però, ci sono e sono tangibili.

Il portamento viene solitamente corretto attraverso una ginnastica medica regolare e mirata, che dà risultati molto positivi.

I problemi di coordinazione, tuttavia, possono perdurare per tutta la vita.

Il quoziente intellettivo (QI) medio dei bambini con sindrome di Sotos oscilla tra il 20 e il 95%.

Non è possibile comunque valutare, in via preventiva, quali saranno le capacità intellettive che raggiungerà il bambino, dal momento che esse dipendono dal livello di QI di partenza, dagli aiuti e dagli stimoli che egli ha ricevuto nel corso dell'infanzia; sono quindi opportune una continua stimolazione e cura dei deficit più importanti. Lo sviluppo del linguaggio può essere ritardato. Quasi tutti i bambini imparano a parlare, ma necessitano di training logopedici intensivi. Essi hanno anche difficoltà di concentrazione, quindi la loro attenzione mantenuta non è delle migliori, e sono riportati casi di iperattività. A scuola possono essere elementi disturbanti, poiché chiedono sempre ai compagni aiuti e informazioni.

I bambini con sindrome di Sotos non hanno, in generale, gravi difficoltà di lettura, mentre la matematica, con le sue astrazioni, può essere un problema per molti di essi, in età scolare. Nella scrittura questi bambini possono utilizzare una grafia grande e immatura.

Dal punto di vista caratteriale, essi sono bambini splendidi, affettuosi e cordiali, che socializzano con facilità soprattutto con gli adulti, con i quali instaurano rapporti di fiducia e collaborazione. Con i coetanei, invece, hanno spesso delle difficoltà, dovute all'immaturità e alla connotazione fisica.

L'educazione e l'istruzione dei bambini con questa sindrome non sono delle più facili; essi necessitano di punti di riferimento stabili, come docenti di sostegno e di classe in grado di padroneggiare le difficoltà, creando sempre e comunque alternative metodologiche per l'apprendimento facilitato.

La conoscenza della patologia è quindi alla base di una progettazione che abbia "senso" e dia al bambino affetto dalla sindrome i giusti mezzi e strumenti per realizzare tutti gli obiettivi che gli altri bimbi raggiungono normalmente.

Per questo motivo, nell'ambito di una scelta consapevole, i docenti hanno ritenuto che il "gioco" fosse l'elemento che meglio poteva essere padroneggiato in un ambito complesso; così tutti i laboratori sono stati organizzati in tal senso e hanno dato la possibilità al bambino di esprimere il meglio di sé, raggiungendo in modo divertente obiettivi riferiti all'apprendimento matematico. I tempi ovviamente sono risultati dilatati, ma l'inserimento nei gruppi di laboratorio con altri compagni ha valorizzato la corretta sequenza relativa alle tappe necessarie per il consolidamento di semplici concetti, soprattutto di tipo logico.

In un contesto del genere, ci si può chiedere quali siano stati i processi seguiti, ovviamente da tutta la classe, per realizzare la ricerca relativa ai giochi. Le tre docenti hanno inizialmente concordato l'approccio a giochi noti e non, per favorire al massimo l'apprendimento logico e la comunicazione, oltre alla socializzazione dei risultati, nel rispetto e nella condivisione degli "Obiettivi generali del percorso formativo" (D.L. n. 59 del 19 febbraio 2004 art. 13 comma 3): «*La Scuola Primaria utilizza situazioni reali e percorsi preordinati per far acquisire ai fanciulli non solo la consapevolezza delle varie forme, palesi o latenti, di disagio, [...] ma anche la competenza ad affrontarle e superarle con autonomia di giudizio... Parimenti porta ogni allievo non solo alla presa di coscienza della realtà dell'handicap e delle sue forme umane, ma lo stimola anche a operare e a ricercare con sensibilità, rispetto, creatività e partecipazione allo scopo di trasformare sempre l'integrazione dei compagni in situazione di handicap in una risorsa educativa e didattica per tutti*».

Gli obiettivi specifici di apprendimento scelti per la classe si riferivano soprattutto all'ambito logico, ma nel contempo erano atti a favorire anche il dialogo comunicativo, sia con i compagni di classe, sia con gli adulti e i visitatori.

Gli obiettivi di tipo socializzante e comunicativo erano i seguenti:

- saper affrontare un ambiente sconosciuto;
- saper condividere con i compagni esperienze nuove;
- saper comunicare con estranei;
- saper spiegare le fasi del gioco e le regole riferite allo stesso;
- saper valutare le proprie performance con serenità, senza demoralizzarsi.

Le fasi di lavoro sono state articolate nel seguente modo:

Fasi di lavoro docenti	Fasi di lavoro alunni
Discussione sugli argomenti da trattare; lavoro di ricerca; scelta degli stessi.	Ricerca, attraverso i giochi noti, di regole; valutazione delle stesse nell'applicazione pratica.
Progetto di costruzione dei giochi (in particolare della Torre di Hanoi).	Progetto riferito all'originale: uso di scatole di cartone, costruzione di cerchi concentrici colorati da posizionare sulle stecche, sistemazione e coloritura.
Verifica di processo.	Verifica di funzionamento attraverso prove ripetute a coppie.
Verifica finale sia nelle giornate di "La matematica dei ragazzi", sia presso la scuola, ambiente nel quale la manifestazione è stata ripetuta per le famiglie.	Verifica finale, attraverso la capacità di illustrare a compagni e adulti le fasi del gioco, di rispondere ai quesiti posti e di risolvere situazioni contingenti.

Nella relazione sul laboratorio "Gioco e matematica" contenuta nel presente volume sono illustrate le fasi organizzative e le verifiche progettuali.

Attraverso la presentazione ai visitatori, il bambino affetto da sindrome di Sotos ha avuto modo di esprimersi e di affinare il suo linguaggio, trasformandolo in messaggi utili e necessari per l'uso dei giochi.

Le docenti hanno riadattato il progetto, cercando di coinvolgere il soggetto e i compagni, e i risultati sono stati straordinari. È bene, infatti, non dimenticare mai che, in casi così particolari, anche la creatività dei docenti trasforma il continuo divenire delle cose in piccole e grandi vittorie.

NOTE

* Scuola Primaria "G. Carducci",
Aurisina Cave, 85,
I-34100 Duino-Aurisina (Trieste)
e-mail: cinziascheriani@virgilio.it

1 Cfr. *www.fisiobrain.com*

BIBLIOGRAFIA

LUCANGELI D., PASSOLUNGHI M. C., 1995, *Psicologia dell'apprendimento matematico*, UTET, Torino.

MARCELLI D., 1997, *Psicopatologia del bambino*, Masson, Milano.

WILLIAMS W., IANES D., 1984, *Matematica pratica per l'handicappato*, Erickson, Trento.

SITI WEB

www.fisiobrain.com

www.ritardomentale.it

www.genetica.ch/sotos_it pdf

www.istruzione.it

A colpo d'occhio... Giocando con le stime e le misure

Antonella Declich e Giuliana Pellegrini *

Introduzione

Nella scuola primaria, l'insegnamento della misura ha come fine la capacità di riconoscere le caratteristiche misurabili di un oggetto o di un fenomeno e di utilizzare unità, sistemi, strumenti, tecniche e processi per attribuire un valore numerico alle grandezze individuate. Ciò si configura in continuità con il campo d'esperienza della scuola dell'infanzia "lo spazio, l'ordine e la misura" e si sviluppa con attività quali l'osservazione di fatti e fenomeni per cogliere grandezze e successivamente quantificarle, dopo averle confrontate e ordinate. Lo scopo ultimo è di portare gli alunni a considerare il "misurare" come uno strumento conoscitivo che aumenta la possibilità di comprendere fatti e fenomeni, perché consente di analizzarli e studiarli attraverso un approccio quantitativo basato sul confronto e l'elaborazione delle grandezze che li caratterizzano.

Azioni didattiche e competenze coinvolte

Si è sviluppato un percorso didattico suddiviso nelle fasi di seguito descritte.

Caratteristiche misurabili e non. La fase iniziale consiste nell'osservare, toccare, manipolare "cose" da parte degli alunni, il più possibile variate, perché acquisiscano l'abitudine di individuare diverse caratteristiche delle "cose" che osservano e successivamente distinguano quelle che si possono misurare, come la lunghezza o il peso, da quelle che non si possono esprimere con numeri riferiti ad unità di misura e rilevabili con uno strumento, come la bellezza o il colore.

Confronto tra grandezze. Le attività proposte hanno qui l'obiettivo di caratterizzare il passaggio da una percezione soggettiva della grandezza presa in esame ad una sua valutazione oggettiva (si pensi per esempio alle sensazioni soggettive di caldo o freddo, alle percezioni di lungo o corto, leggero o pesante ecc.). Il confronto comporta l'ordinamento delle grandezze prese in esame. Un primo livello di ordinamento proposto è quello qualitativo (ad es. questo è più lungo di quello ecc.); successivamente, assegnando un numero ad una grandezza come risultato di un'operazione di misura, si passa all'ordinamento quantitativo.

Attività di Misura. Il misurare implica inizialmente la scelta di una unità campione convenzionale o non. Le attività prevedono il passaggio da un'unità non convenzionale legata all'esperienza del bambino (parti del corpo, oggetti scolastici), ad unità ancora non convenzionali, ma condivisibili e oggettive all'interno del gruppo classe, per giungere infine ad unità convenzionali condivisibili all'esterno del gruppo classe (metro, litro, ecc.). Le attività proposte sono scelte in modo tale che il bambino stabilisca l'opportunità di utilizzare un'unità di misura o un'altra, a seconda della grandezza che deve misurare. Si misura inizialmente per conteggio, il che rappresenta un primo livello dell'atto di misurare (ad es. "Quanti pollici è lungo il banco?"). In queste esperienze iniziali, l'insegnante gestisce l'attività in diverse fasi: l'esperienza fatta da ogni bambino, la registrazione dei dati, il confronto dei dati e la successiva discussione che faccia emergere la necessità di pervenire ad un metodo di misura che minimizzi l'errore del riportare più volte l'unità di misura. Si passa poi a considerare cosa succede se l'unità di misura scelta non è contenuta un numero intero di volte nella grandezza che si misura, e quindi avanza un pezzo. Nelle attività proposte si fanno riflettere gli alunni sull'opportunità o meno di misurare quel "pezzettino" e sul come farlo. Un primo passo consiste nell'osservare a quale tacca è più vicino il pezzettino, stabilendo una prima approssimazione per difetto o per eccesso. Successivamente si fa emergere la necessità di misurare il pezzettino rimasto con unità di misura più piccole e si introducono i sottomultipli dell'unità di misura, il che permette di misurare con migliore approssimazione.

Stima. Legata alla misura di una grandezza è la sua stima, cioè la valutazione di una misura approssimativa della grandezza stessa. Nella stima rientrano due capacità: l'una è quella di richiamare alla mente una misura nota, l'altra è quella di usare una qualche procedura per agire sulla misura conosciuta, al fine di determinare la misura sconosciuta. Per arrivare a ciò, è necessario lavorare con i bambini facendo esperienze su misure di base e su "strategie" operative per stabilire la misura approssimativa. (Ad esempio, se i bambini hanno già misurato la lunghezza di un banco e la distanza tra un banco e l'altro, sulla base di questi dati e con delle considerazioni aritmetiche, oppure ad occhio, potranno dire quanto approssimativamente è lunga l'aula.)

Il laboratorio

Il laboratorio presentato alla manifestazione "La matematica dei ragazzi" è stato pensato per i bambini delle classi seconde e terze, entrambi alle prime scoperte riguardo al concetto di misura. Il nostro progetto si è basato su esperienze concrete di misurazione e stima di oggetti e "cose" inerenti al vissuto del bambino. Anche nella scelta degli strumenti e delle unità di misura arbitrarie ci siamo indirizzate verso materiali rilevabili nella loro realtà.

Per gli alunni delle classi terze, con i quali è stato introdotto il concetto di unità convenzionale (m, kg, l), si è lavorato sul confronto ("di più di...", "di meno di...") tra queste unità e le misure di oggetti relazionati ad esse.

Il laboratorio proponeva quattro aree tematiche: lunghezza, peso, capacità, tempo. Ogni area era suddivisa in più postazioni distinte, gestite da due o più bambini, che si alternavano nella conduzione di attività ludiche e nella presentazione di cartelloni che illustravano l'esperienza precedentemente svolta in classe.

L'attività del laboratorio

Angolo della lunghezza

Postazione n. 1 – "Quanto siamo alti?"

(Stima e misurazione di lunghezze con unità di misura arbitrarie)

Si proponeva un gioco, che consisteva nell'invitare i visitatori a stimare l'altezza di un compagno, prendendo come unità di misura la lunghezza di un pennarello. Successivamente si verificava la stima, procedendo alla registrazione delle altezze dei bambini su di un cartellone bianco.

Postazione n. 2 – "Il gioco del sarto"

(Stima e misurazione di lunghezze con unità di misura convenzionali e non)

Si proponeva un gioco in cui il visitatore doveva scegliere un'unità di misura non convenzionale tra alcune date e stimare ad occhio determinate lunghezze su un cartamodello di un grembiule. La fase successiva consisteva nella verifica delle stime attraverso la misurazione. Lo stesso gioco veniva ripresentato usando come unità di misura il metro.

Angolo del peso

Postazione n. 3 – "La bilancia casalinga"

(Stima e misurazione del peso con unità di misura arbitrarie)

Si proponeva il seguente gioco: tre bambini a turno spiegavano il funzionamento della bilancia a due bracci, da loro costruita posizionando a metà di un bastone un appendiabiti, alle cui estremità erano appesi due sacchetti di plastica. Si procedeva poi alla stima del peso di un oggetto scelto dai visitatori, prendendo come unità di misura il peso di un pennarello. In seguito, si verificava la stima attraverso l'effettiva misurazione, ponendo in un sacchetto l'oggetto da pesare, e nell'altro i pennarelli necessari per equilibrare il suo peso.

Postazione n. 4 – "Il gioco dei ceci"

(Stima e misurazione del peso con misure convenzionali)

Il visitatore aveva a disposizione un sacchetto contenente 1 kg di ceci, altri sacchetti di ceci di pesi diversi e una bilancia a due bracci. Il visitatore doveva indicare attraverso una prima stima ad occhio ed una successiva percezione tattile del peso dei ceci, gli unici due sacchetti da un chilogrammo.

Postazione n. 5 – "Occhio al cartello"

(Stima e misurazione del peso con unità di misura convenzionali)

Il visitatore aveva a disposizione cinque oggetti di uso scolastico, a cui doveva associare, dopo una stima ad occhio, cinque cartelli che riportavano determinati pesi. Soppesando successivamente gli oggetti, il visitatore poteva modificare le associazioni con i cartelli. Alla fine, il visitatore verificava l'effettivo peso degli oggetti attraverso una bilancia a due bracci.

Angolo della capacità

Postazione n. 6 – "Ci perdiamo in tanti bicchieri d'acqua"

In questa postazione venivano presentati due giochi.

Primo gioco (Conservazione delle quantità). Il visitatore veniva invitato ad osservare due bottiglie della stessa forma, ma con dimensioni diverse; la bottiglia di dimensione inferiore era colma d'acqua, l'altra era vuota. Prima di travasare l'acqua della bottiglia piena in quella vuota, si chiedeva al visitatore di indicare su quest'ultima bottiglia il possibile livello raggiunto dall'acqua versata ("Dove arriverà l'acqua dopo il travaso?"). Successivamente si procedeva alla verifica.

Secondo gioco. (Stima e misurazione della capacità con unità di misura non convenzionali). Su un recipiente erano segnati il livello raggiunto dall'acqua contenuta in un bicchiere, che veniva preso come unità di misura, e un altro livello più in alto. I visitatori erano invitati a stimare la quantità di bicchieri d'acqua necessari a raggiungere il secondo livello. Si procedeva poi alla verifica.

Postazione n. 7 – "Attenti al litro"
(Stima e misurazione della capacità con unità di misura convenzionali)
Si presentava il seguente gioco: si mostravano al visitatore un contenitore vuoto della capacità di 1 litro ed altri recipienti contenenti quantità diverse di acqua. Il visitatore, dopo una stima ad occhio, doveva stabilire quale recipiente conteneva 1 litro d'acqua. Si procedeva poi alla verifica.

Angolo del tempo

Postazione n. 8 – "A tempo di musica...?"
(Percezione del tempo)
Si presentava il seguente gioco: il visitatore, ascoltando successivamente due melodie con caratteristiche diverse, l'una allegra e veloce, l'altra lenta e triste, doveva indicare se entrambe avevano la stessa durata o, eventualmente, quale delle due avesse durata maggiore. La durata reale di entrambe le musiche era la stessa, ma il tempo percepito ascoltando la melodia triste risultava maggiore.

Postazione n. 9 – "A spasso nel tempo"
(Stima e misura del tempo con unità di misura non convenzionale)
Si proponeva al visitatore un labirinto disegnato su carta, una matita e una clessidra, della durata di 1 minuto circa, costruita dai bambini. Il gioco consisteva nel provare ad indovinare il tempo impiegato a percorrere il labirinto, prendendo come unità di misura del tempo un giro della clessidra. Dopo aver fatto la stima, iniziava il gioco.

Conclusioni

Nel corso dei mesi precedenti la manifestazione, dopo una prima fase in cui si alternavano momenti d'insegnamento frontale ad altri più interattivi e sperimentali, nel corso dei quali sono stati delineati i concetti matematici contenuti nel laboratorio, i bambini hanno avuto modo di lavorare a piccoli gruppi, per preparare le attività da proporre a "La matematica dei ragazzi".

La didattica messa quindi in atto, basata sul principio del *learning by doing*, ha permesso di coinvolgerli in maniera più attiva, favorendo maggiormente le loro capacità intuitive ed evitando di strutturare precocemente gli apprendimenti, e ha stimolato in loro la crescita di uno spirito critico, avvicinandoli di più alle discipline scientifiche.

In questa fase preparatoria i bambini si sono esercitati dimostrando un evidente interesse. Erano entusiasti di cambiare per due giorni il loro ruolo all'interno dell'ambiente scolastico. La maggior parte di loro ha dimostrato notevole serietà nell'assumere il ruolo d'insegnante; riteniamo che l'aspettativa di assumere tale ruolo nel corso della manifestazione sia stata la motivazione principale che li ha indotti ad effettuare più facilmente nuovi apprendimenti.

Dal punto di vista interdisciplinare, oltre all'acquisizione di precisi concetti matematici, i bambini hanno dovuto dimostrare di impegnarsi per impossessarsi di altre competenze. Hanno costruito un linguaggio specifico nel settore, per spiegare ai loro coetanei le attività che proponevano, toccando quindi degli obiettivi trasversali appartenenti al settore linguistico. Contemporaneamente, lavorando insieme ai compagni, hanno sviluppato delle competenze affettivo-relazionali, dimostrando di saper collaborare insieme per la riuscita di un obiettivo comune.

Durante le giornate della manifestazione, i nostri allievi hanno gestito egregiamente le situazioni che di volta in volta si presentavano. Non è mancata all'inizio una certa dose d'emozione, ma la consapevolezza di conoscere bene le attività che dovevano presentare, grazie alle numerose esercitazioni svolte, ha donato loro la sicurezza necessaria per affrontare i visitatori. In quest'occasione anche i bambini più timidi ed insicuri, che durante le prove non erano ancora pronti, hanno dimostrato di saper gestire la situazione. Tenendo presente i tempi d'attenzione limitati che generalmente si ipotizzano per gli alunni della scuola primaria, possiamo affermare che i nostri bambini hanno dimostrato capacità d'attenzione e sopportazione della fatica superiori a quanto richiesto nel normale lavoro scolastico. È stata per loro un'esperienza che li ha coinvolti emotivamente ed intellettualmente, e che ha accresciuto il loro senso di responsabilità. La maggior parte di loro ha inoltre espresso il desiderio di ripetere quest'esperienza.

NOTE

* Docenti della Sc. El. “V.Giotti”,
Istituto Comprensivo “T.Weiss”,
Strada di Rozzol 61, I-34100 Trieste

BIBLIOGRAFIA

Bagni G.T., 1999, *Matematica,* Guerini Studio, Milano.

Bartolini Bussi M., 1992, *Lo spazio, l’ordine, la misura*, Juvenilia, Bergamo-Milano.

Cannizzaro L., Crocini P., Mazzoli P., 2000, *Numeri: conoscenze e competenze: un progetto tra scuola dell’infanzia e scuola di base* (a cura di M. Bartolini Bussi), Junior, Azzano San Paolo.

Lisciani G. (a cura di), 2004, *Nuove esperienze: didattica integrata per gli anni duemila*, Lisciani scuola, Teramo.

Speranza F., Medici Caffarra D., Quattrocchi P., 1986, *Insegnare la Matematica nella scuola elementare*, Zanichelli , Bologna.

Relazione di Alice

Giovedì 30 e Venerdì 31 marzo si sono svolti i laboratori della "matematica dei ragazzi." Ero tanto emozionata e, se dico la verità, avevo un po' di paura, però mi sono molto divertita; io facevo il "gioco del peso", la prima volta ero con Sara S. poi con Sara T.. Dovevamo chiedere agli spettatori una stima a occhio di alcuni oggetti, poi una stima soppesando e dopo si verificava il tutto pesando. Mi è proprio piaciuta questa bella esperienza!

Luce

Nadia Gasparinetti*

Introduzione

Partecipare alla manifestazione “La matematica dei ragazzi” è coinvolgente, ma senza dubbio molto impegnativo dal lato organizzativo; quest’anno, però, potevo utilizzare le ore di laboratorio di scienze (i laboratori sono previsti dalla nuova riforma scolastica e sono facoltativi per gli alunni) e avrei risolto così anche il problema di quali attività proporre in tale ambito. Ho scelto la classe seconda perché gli alunni frequentanti il laboratorio erano 14, un buon numero per poter lavorare con una certa tranquillità. Inoltre, i ragazzi fanno parte di una classe che si è sempre distinta per il poco interesse verso le lezioni tradizionali, molto annoiata durante le spiegazioni, la lettura e lo svolgimento di esercizi; quindi mi è sembrato che la preparazione e lo svolgimento di “La matematica dei ragazzi” potesse essere un’idea per un lavoro diverso, che li avrebbe coinvolti di più. Non ultimo, c’era la possibilità di lavorare con la collega Eva Godini, mamma di un’alunna, che si era offerta di collaborare. Il tema “Luce”, infine, l’ho proposto io alla classe perché avevo del materiale e avrei potuto cogliere l’occasione per utilizzare anche strumenti di laboratorio.

Così siamo partiti subito, dall’inizio dell’anno scolastico. Ho lasciato che gli alunni si dividessero da soli in gruppi, anche se ciò non ha dato i migliori risultati e qualche incomprensione tra i ragazzi c’è stata. Nelle prime lezioni abbiamo stabilito assieme, osservando i libri di scienze e controllando la strumentazione di laboratorio, quali esperimenti proporre, ma, in particolare, il taglio matematico da dare al tutto. Alla fine, dopo non pochi problemi, abbiamo organizzato cinque gruppi, denominati con il titolo dei relativi esperimenti: "I colori della luce", "Crescita delle alghe" (due gruppi, con la collaborazione di Eva Godini), "Le diottrie", "Una luce da lontano". Il lavoro si è svolto nell'ora riservata al laboratorio, con cadenza settimanale.

Gli esperimenti presentati dai vari gruppi di allievi non erano, in generale, dello stesso livello di difficoltà, ma ciò mi ha permesso di far lavorare tutti i ragazzi, sviluppando anche le loro abilità e competenze, come quando, ad esempio, hanno allestito praticamente da soli la presentazione in *Power Point* dell'esperimento sulla crescita delle alghe; per tale aspetto, il lavoro è entrato a far parte del progetto "Comenius" della nostra scuola, che verte proprio sullo sviluppo e la valutazione delle competenze. Ma vediamo in dettaglio i vari lavori.

I colori della luce

Tre ragazze si sono cimentate, prima, nel classico esperimento della scomposizione della luce con l'uso del prisma e, poi, nella combinazione dei colori sovrapponendo le luci di tre torce. L'idea è stata tutta loro e traeva lo spunto da un libretto di esperimenti e da una visita che una delle ragazze aveva fatto allo *Science Centre* "Immaginario Scientifico" di Trieste. Di tutti, questo è stato l'esperimento più semplice e l'unico che non ha sviluppato l'aspetto matematico; ha avuto però successo presso le classi di scuola elementare e le ragazze coinvolte hanno svolto un buon lavoro di ricerca e organizzazione. È stato, inoltre, notevole il coinvolgimento di una di loro, che ha saputo superare le sue difficoltà di esposizione e di partecipazione, aumentando l'autostima.

Crescita delle alghe

È stata la parte più laboriosa di tutta l'attività, ma sicuramente la più gratificante. Vi hanno partecipato cinque allievi, tra ragazzi e ragazze, divisi in due gruppi anche a causa delle incomprensioni e dell'incapacità di alcuni al lavoro di tipo collaborativo. L'attività è stata organizzata per la parte scientifica da Eva Godini. L'esperimento è stato reso possibile grazie alla fornitura, da parte del Dipartimento di Oceanografia Biologica dell'Osservatorio Geofisico Sperimentale di Trieste, di alcuni materiali necessari. Si trattava di far crescere la microalga *dunaliella*[1] con l'uso della luce adatta, di calcolare il numero di cellule ottenute e di costruire poi la relativa curva di crescita.

Il primo passo è stato quello di allestire l'esperimento in classe, cosa non facile perché si trattava di lasciar accesa la luce al neon, acquistata per l'occasione, per almeno dieci ore al giorno e di evitare che estranei toccassero le beute[2] con le colture. Poi, con cadenza costante, si prendeva un campione della coltura, se ne bloccava la crescita e si poneva la provetta in frigorifero, in attesa della conta finale. Alla fine, si è passati alla conta delle cellule nei diversi campioni prelevati e quindi alla costruzione della curva di crescita.

Per la costruzione della curva di crescita della *dunaliella* si è dovuto richiamare alcune nozioni di matematica già studiate e introdurne di nuove. All'inizio dell'esperimento si è parlato delle unità di misura usate quando si parla di dimensioni di cellule (millimetri, micron, con esempi di dimensioni di organismi unicellulari, virus, ecc.); si è rispiegata la notazione scientifica (già fatta lo scorso anno, ma sempre difficile per gli allievi, soprattutto quando si affrontano le potenze di dieci con esponente negativo).

Si è poi spiegato cosa siano il potere di risoluzione di un microscopio e l'ingrandimento. Poi ci si è chiesti come crescono le microalghe in laboratorio, nel brodo di coltura in condizioni controllate, stabilendo che, per una coltura, "crescere" significa "aumentare il numero delle cellule presenti", che si moltiplicano di solito per divisione cellulare semplice.

L'aumento di cellule avviene a diverse velocità: all'inizio si ha una divisione lenta, poi molto veloce, infine quasi nulla. Tutto questo processo è stato rappresentato con il grafico della curva di crescita.

Il piano cartesiano era già noto ai ragazzi, che lo scorso anno avevano anche costruito i grafici relativi all'ebollizione e al raffreddamento dell'acqua, usando sensori tarati per i gradi Celsius e Fahrenheit. Il problema della curva di crescita è però più complesso perché si tratta di una crescita di tipo esponenziale. Abbiamo risolto tale problema spiegando con uno schema la divisione cellulare: una cellula si divide in due e poi da queste due cellule ne abbiamo altre quattro, poi otto e così via. Alla fine, per i ragazzi è stato semplice notare che i numeri ottenuti erano tutte potenze di due.

Le diottrie

Tre ragazzi, molto interessati alle materie scientifiche e motivati, hanno dato vita a questo laboratorio. Hanno organizzato tutto da soli, sfruttando quanto c'era a scuola e suggerendo anche qualche acquisto di materiale nuovo. In pratica, si trattava di utilizzare il banco ottico per calcolare le diottrie delle lenti convergenti (come quelle per occhiali da presbiopia).

La teoria è semplice: quando un oggetto si trova a una certa distanza davanti a una lente convergente, la sua immagine, prodotta dalla lente e proiettata su uno schermo, varia di dimensione e si modifica a seconda della distanza dell'oggetto dalla lente (fermi restando la lente e lo schermo). In particolare, quando la distanza è il doppio della distanza focale della lente, l'immagine sullo schermo risulta capovolta, ma di misura identica a quella dell'oggetto; questo può diventare il modo per calcolare la distanza del fuoco della lente dal centro della lente (distanza focale): basta spostare l'oggetto fino a che la lente produce una immagine della stessa grandezza dell'oggetto dato. Si misura allora la distanza dell'oggetto dalla lente e si divide il risultato per due, trovando così la distanza focale. Per trovare le diottrie (nel caso delle lenti convergenti) si applica poi la seguente formula:

$$\text{potenza della lente (in diottrie)} = 1/f$$

dove f è la distanza focale espressa in metri.

Con un paio di occhiali di circa 3 diottrie, si otteneva che $1/f$ era uguale a 3, per cui la distanza focale delle lenti doveva essere $f = 0{,}33\ldots$ metri. In questo caso l'oggetto doveva trovarsi a circa 66 cm dagli occhiali posti sul banco ottico affinché l'immagine sullo schermo fosse della sua stessa misura. Ovviamente le misure non erano perfette, anche perché come oggetto si utilizzava una candela accesa (così hanno voluto i ragazzi perché era di effetto e perché lo avevano trovato nei libri consultati) e la fiamma si muoveva, rendendo un po' difficile la misurazione. Durante la preparazione, i ragazzi si sono divertiti a misurare le lenti degli occhiali degli insegnanti.

Una luce da lontano

In questo gruppo hanno lavorato tre ragazzi, di buone capacità in generale, ma assolutamente non preparati, tanto che due non hanno superato a fine anno scolastico lo scrutinio finale; tuttavia, sono stati abili nel maneggiare gli strumenti, risolvendo brillantemente, soprattutto in fase di preparazione, i problemi pratici che si presentavano. Essi non hanno saputo cogliere completamente l'aspetto matematico dell'esperimento, però si sono resi conto da soli dei loro limiti, tanto che mi hanno confidato di aver ripassato il loro intervento tra una giornata e l'altra della manifestazione, per essere più preparati. Cosa mai accaduta per le lezioni curricolari!

In pratica, si trattava di rilevare, con l'uso del sensore di luce collegato a una calcolatrice grafica, la variazione di luminosità al variare della distanza dalla sorgente di luce: un ragazzo si posizionava davanti a una lampada accesa, a distanze prefissate segnate con nastro adesivo sul pavimento, e raccoglieva i dati in ogni posizione (le posizioni erano sei). La calcolatrice produceva alla fine il grafico relativo, che veniva proiettato su uno schermo.

È chiaro che è difficile per alunni di seconda media intuire la legge matematica collegata all'esperimento, ma per me era sufficiente che osservassero come i valori di luminosità diminuivano con l'aumentare della distanza; ho fatto solo osservare che, raddoppiando la distanza, la luminosità diventa quattro volte inferiore. I ragazzi hanno però percepito quale dovesse essere l'andamento del grafico, perché, nel corso della manifestazione, ho notato che essi, facendo raccogliere i dati ai visitatori, distinguevano esattamente i grafici “ben riusciti” da quelli affetti da errori, che evidenziavano subito.

Osservazioni conclusive

Alla fine ho somministrato il questionario di valutazione preparato per i partecipanti. Devo dire che i ragazzi sono stati tutti molto sinceri, cogliendo i vari aspetti della situazione. Giustamente critici, essi hanno valutato con obiettività il loro lavoro.

Dalle risposte di alcuni emerge una difficoltà a lavorare insieme, nonostante a scuola siano abituati ai lavori di gruppo in varie discipline; si notano una preferenza a rivolgersi ad alunni delle scuole elementari, perché più interessati ed entusiasti (e perché fanno domande meno specifiche!), e una difficoltà generale a parlare agli altri in pubblico, problema che qualcuno ha superato brillantemente. Ho infine notato con piacere che gli alunni si sono resi conto del fatto che ho apprezzato il loro lavoro.

NOTE

* Istituto Comprensivo "Divisione Julia" , Viale XX Settembre, 26, I-34125 Trieste
e-mail: fulerene@libero.it

1 Si tratta di un'alga unicellulare che cresce nei laghi salati dell'Australia.

2 La beuta è un recipiente con base tronco-conica e collo cilindrico usato nei laboratori chimici e in microbiologia.

BIBLIOGRAFIA

BELLINI Q., 1961, *Il progresso delle realtà fisiche*, Giunti Marzocco, Firenze.

STEIN J.R. (a cura di), 1973, *Culture methods and growth measurements*, Cambridge University Press.

SITI WEB

www.pacifici-net.it/biologia/Microbiologia

La nostra storia informatica e non solo...

Giuliana Candussio*

Premessa

"La nostra storia informatica e non solo... dalla nostra storia informatica... alla storia dell'informatica" è il laboratorio con cui le classi II e III della Scuola Media "Via Roma" di Mariano del Friuli (GO) hanno partecipato alla VI edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi".

Avendo come riferimento il lavoro svolto nella Scuola di Mariano dai primi anni '80 a oggi, i ragazzi hanno illustrato alcune tappe della storia dell'informatica, coinvolgendo i visitatori in vari percorsi ed esperienze e utilizzando diversi strumenti di calcolo: dalla macchina per il calcolo binario allo Spectrum, dalle calcolatrici grafiche ai più evoluti sistemi attuali, con l'obiettivo di contribuire ad ampliare e approfondire le proprie conoscenze in modo anche divertente.

Da più di 20 anni, la Scuola Media di Mariano ha inserito in vari percorsi disciplinari l'uso di strumenti informatici per l'elaborazione di informazioni sia numeriche che alfanumeriche.

In occasione del ventennale dell'acquisizione del primo computer, uno *Spectrum* 48k (anno scolastico 1983-84), lo scorso anno è stato allestito un piccolo museo con una mostra di tutte le macchine impiegate nell'Istituto, unitamente a esemplari degli elaborati prodotti in più di 4 lustri di attività sui più svariati argomenti. Dopo una prima fase iniziale (dal 1984 al 1986), in cui l'uso del computer ha coinvolto principalmente l'ambito matematico e, in particolare, la realizzazione di semplici programmi con il linguaggio *Basic*, già dal 1986 l'attenzione è stata rivolta a un uso più trasversale del computer, mediante l'utilizzo di vari programmi gestionali.

Hanno visto così la luce diversi progetti a carattere pluridisciplinare coinvolgenti non solo gli studenti della Scuola di Mariano o, in alcuni casi, di altri istituti in rete, ma anche enti esterni; progetti realizzati nell'arco di questi venti anni e che tuttora sono attuati, pur con una serie svariata di modifiche e integrazioni, indotte anche dall'evoluzione delle tecnologie disponibili. Un esempio per tutti: lo studio ambientale del territorio dal punto di vista del clima, dell'inquinamento dell'aria (piogge acide, elettromagnetismo, …), dell'acqua e del suolo, del problema rifiuti, ecc.

Naturalmente l'allestimento di un museo, sia pur piccolo come il nostro, necessita, oltre che di spazi e di materiali, anche di un'organizzazione espositiva e di un inquadramento storico (una sintesi breve e significativa delle principali tappe della storia dell'informatica), che faccia da sfondo alla presentazione delle singole macchine in mostra. Ecco allora l'opportunità di possedere anche un piccolo bagaglio di conoscenze storiche.

L'idea del museo è parsa particolarmente significativa per vari motivi:

– la presenza di una "memoria storica" della scuola: l'insegnante (chi scrive) con la sua trentennale presenza nella scuola, che, con entusiasmo e iniziale "pionierismo", aveva gettato le basi di tutte le attività, portandole avanti fino a oggi;

– la continuità dell'attività progettuale realizzata in tutti questi anni, che ha consentito l'inserimento in svariate iniziative, anche a livello nazionale;

– il vissuto di due generazioni (genitori e figli) che hanno frequentato e frequentano la stessa scuola;

– la presenza della strumentazione, conservata negli anni, e di molti elaborati prodotti;

– la disponibilità di tecnologie moderne per la realizzazione del progetto.

Il museo rappresenta uno spaccato della storia di una comunità. Perché quindi non far conoscere ai ragazzi di oggi quella che era la realtà nelle epoche precedenti, fino agli anni in cui i genitori avevano la loro stessa età e magari frequentavano la medesima scuola?

Perché non incuriosirli e farli meditare su quanto e come in 20 anni siano cambiati non solo la tecnologia e gli "oggetti" utilizzati, ma, di conseguenza, anche il nostro modo di vivere?

Allora circolavano le semplici calcolatrici tascabili (e nemmeno tanto diffusamente), raramente quelle scientifiche e tanto meno quelle programmabili;

non vi erano ovviamente tutti quegli oggetti “cult” delle generazioni attuali: computer, portatili, palmari, navigatori satellitari, telefonini e i tanto amati SMS, MMS, Internet, videogiochi, ecc., tutte cose usuali e più che normali per i ragazzi e i bambini di oggi.

L’attività

Da queste considerazioni è nata inizialmente l’idea del museo e, successivamente, grazie anche all’interesse e alla partecipazione dimostrati dai ragazzi durante le fasi della sua realizzazione e all’input, datoci da Luciana Zuccheri, di provare a rimettere in funzione il vecchio Spectrum (che, in effetti, aveva suscitato molta meraviglia nei ragazzi, quasi come un oggetto misterioso: “Computer quello?”), il progetto di ampliare e integrare il percorso intrapreso.

È stata così proposta, condivisa e via via organizzata l’attività da presentare a “La matematica dei ragazzi”.

Fondamentalmente, il percorso avrebbe dovuto soddisfare alcune domande derivanti da quanto esposto sopra, come:

– Quando sono state inventate le prime “macchine” per eseguire calcoli? Perché? Quali esigenze aveva l’uomo?

– Funzionano ancora i nostri vecchi computer? Il famoso *Spectrum*?

– Come funziona un computer? Quali scoperte, invenzioni, idee ne stanno alla base?

– Quali sono le tecnologie più moderne a nostra disposizione, utilizzabili anche a scuola?

Alla prima domanda era relativamente facile rispondere: il materiale (strumentazione, cartelloni, presentazioni in *Power Point*, ...) era già pronto.

Il “grosso” del lavoro è stato quindi quello di mettere a punto conoscenze materiali, dimostrazioni, presentazioni, ecc., per fornire adeguate risposte agli altri quesiti. L’impegno è stato affidato ai ragazzi di seconda (già realizzatori del museo e con alcune conoscenze di base) e di terza (dotati di maggiore competenza sia in campo informatico – nell’uso di determinate tecnologie – che matematico).

Tutta l’attività didattica è stata rivolta alle classi intere, durante le ore curricolari di matematica, scienze e informatica, e quindi inserita nelle unità di apprendimento proposte nell’arco dell’anno. Durante rientri pomeridiani aggiuntivi (con i ragazzi disponibili) sono inoltre state approfondite alcune tematiche, sono stati finiti e rifiniti alcuni lavori, ma soprattutto sono stati messi a punto tutti i materiali e sono state effettuate le prove per la presentazione finale. Fondamentale è stato il lavoro sinergico dei ragazzi, che, pur di classi diverse e quindi con competenze varie, hanno lavorato assieme, con scambi di conoscenze, di esperienze, di materiali, di idee.

Il percorso del laboratorio

La presentazione del laboratorio è stata quindi delineata e organizzata dai ragazzi, che si sono distribuiti i compiti in vari gruppi nel seguente modo:

1) presentazione del laboratorio e di una breve introduzione riguardante alcune delle tappe fondamentali della storia dell'informatica, con riferimenti alle macchine presenti nel museo della scuola;

2) spiegazioni riguardanti il funzionamento dei computer:

a) la numerazione binaria, con esempi di semplici calcoli effettuati mediante l'utilizzo di una particolare macchina da calcolo binario (interamente costruita in legno e costituita da una cascata di 6 *flip-flop* azionati da palline di vetro), gentilmente prestataci da Corrado Bonfanti, suo ideatore e realizzatore;
b) il codice binario, i bit, i byte, i circuiti logici e le operazioni logiche e matematiche, con spiegazioni ed esemplificazioni pratiche mediante l'utilizzo di semplici circuiti dimostrativi, corredati dalle relative tabelle di verità e costruiti dai ragazzi stessi, e, per il calcolo della somma di 2 numeri (2 bit), con un particolare circuito "semisommatore" del tutto manuale, messo a punto dai ragazzi di terza, assemblando alcuni dei circuiti logici dimostrativi di base;
c) la codifica dei caratteri, il codice ASCII, le memorie ROM e RAM, con spiegazioni e descrizioni di alcuni reperti, fra cui un blocco di memoria a nuclei di ferrite da 1 kb (prestatoci da Corrado Bonfanti e appartenuto a un computer del 1965), un recente hard disk (molto più piccolo) da 10 Gb, un processore Pentium 486, ecc.;

3) descrizioni e spiegazioni relativi allo *ZX Spectrum* 48k e alle sue periferiche, con dimostrazioni sul suo funzionamento effettuate mediante semplici programmi in *Basic*, scritti in precedenza o anche sul momento dai ragazzi e fatti eseguire dalla macchina stessa o da programmi di emulazione, scaricati da uno dei tanti siti di Internet dedicati allo *Spectrum*;

4) presentazione e spiegazione di applicazioni di tecnologie più avanzate relative a:

a) calcolatrici grafiche e uso dei sensori on-line, con dimostrazioni pratiche con sonde di anidride carbonica e di pressione;

b) Internet e sistemi di telecomunicazione e telerilevamento, con alcuni esempi di elaborazioni di mappe utilizzate nei sistemi di navigazione satellitare e alcune esemplificazioni di un nuovo programma, *Google Earth*, scaricato dal sito omonimo.

Alcune considerazioni

Come si può comprendere, il lavoro per i ragazzi è stato notevole e senz'altro faticoso, ma, nello stesso tempo, ricco di soddisfazioni e, si ritiene, abbastanza esauriente rispetto agli obiettivi proposti.
Senza entrare nel merito di obiettivi e percorsi didattici seguiti, si ritiene significativo riportare alcune osservazioni rilevate durante le varie attività:

– il segno lasciato dalla presenza di Corrado Bonfanti a scuola (*"Ma è un genio!"* è stato il commento spontaneo di uno dei ragazzi alla sua uscita dall'aula alla fine della lezione), con le sue spiegazioni (che, pur non sempre semplici per i ragazzi nei contenuti, hanno prodotto un notevole rinforzo di interessi) e i suoi strumenti;

– l'impatto formidabile, misto di curiosità e di reverenziale timore davanti al calcolatore binario a *flip-flop* di Bonfanti, utilizzato poi dai ragazzi stessi autonomamente, sempre con religiosa attenzione;

– l'immediata familiarizzazione con la macchina (tenuto conto del livello di conoscenze dei ragazzi) e la prontezza nel risolvere i vari problemi che si presentavano nel suo utilizzo;

– qualche difficoltà (comprensibile del resto!) nel capire e applicare alcuni algoritmi e ragionamenti, come la differenza con il complemento a due;

– la sorpresa nel vedere quanti *fans* avesse oggi lo *Spectrum* (numerosi infatti sono i siti in Internet al riguardo), e così anche altri gloriosi computer come il *Commodore* 64 (da noi utilizzato per diversi anni);

– la meraviglia e la soddisfazione nel veder funzionare lo *Spectrum* (dopo tanti anni di inattività!) e la relativa facilità nel produrre, con pochissime conoscenze di *Basic*, piccoli programmi, nel destreggiarsi non solo con la tastiera, così diversa da quella degli altri computer, ma anche con istruzioni e comandi del tipo *"go to"*, *"if then"*, ecc., con manuali di istruzione e testi vari e nel ricostruire la tastiera dello *Spectrum* su quella degli attuali PC nell'uso degli emulatori dello stesso;

– lo stupore nel vedere la scarna schermata iniziale dello Spectrum: "*Ma come non ci sono cartelle, icone, programmi, ecc.?*"; tutto doveva essere fornito e memorizzato su nastro, ma… sorpresa!… su alcuni vecchi nastri vi erano perfino i giochi! la soddisfazione (in particolare da parte dei suoi "costruttori") per il funzionamento del circuito semisommatore: un vero gioiello di creatività e arte dell'arrangiarsi!

– l'ansia di non riuscire a far funzionare sempre le calcolatrici grafiche, ma anche l'abilità e l'autonomia nel cercare esperienze alternative;

– la delusione di non poter dettagliare sulle mappe di *Google Earth* la zona di Mariano e la propria scuola.

La voce dei ragazzi

Alcune riflessioni tratte dalle relazioni dei ragazzi:

> *"… all'inizio siamo partite con l'idea che facessero tutto i più bravi mentre noi saremmo rimaste in parte solo a guardare, ma invece non è stato così: tutti hanno messo impegno, c'è chi più e c'è chi meno, ma tutti sono stati orgogliosi dei propri risultati… È stato molto facile spiegare ai bambini più piccoli, mentre ai ragazzi grandi delle superiori era un po' più complicato."*

> *"… ho aiutato con impegno i miei compagni nella preparazione e ho imparato con loro molte cose divertendomi… ma poi ho dovuto, con dispiacere, mancare al grande evento. Sentendo le impressioni positive dei miei compagni mi sono "tanto" dispiaciuto di non aver preso parte al gruppo…"*

> *"… Molte sono state le sensazioni da me provate: la paura di sbagliare, il rimorso, in un certo senso, di quando i gruppi a cui dovevo spiegare se ne andavano via con espressioni incerte, ma anche la felicità di quando mi rendevo conto di aver spiegato con chiarezza. Tra i due giorni nei quali sono stato a Trieste ho notato delle differenze: nel primo giorno, come si può immaginare, c'era un clima di insicurezza, ma è anche stato il più emozionante; nel secondo invece l'insicurezza ha lasciato il posto alla voglia di fare meglio e addirittura a una eccessiva scioltezza… e mi sono reso conto ancora di più del nostro grande impegno. Purtroppo però ho potuto visitare solo uno degli altri laboratori presenti all'evento."*

> *"… mi sono divertito molto e mi ha divertito molto scambiare le idee in campo informatico con altri miei compagni… Diciamo che me la sono cavata piuttosto bene grazie alle tante prove che la professoressa… ci ha permesso di fare, … la ringrazio per averci dato questa opportunità e anche per i suoi sacrifici: credo, però, che alla fine l'abbiamo ripagata."*

"Nell'attività scolastica... io ho partecipato passivamente, ma alla fine ho aiutato i miei compagni, facendo loro delle domande come se fossi uno spettatore, a perfezionare la propria presentazione e a sapere risolvere altre possibili domande fatte da coloro che ascoltavano ed ammiravano il lavoro fatto dalla scuola di Mariano. I lavori fatti dai miei compagni erano molto interessanti... Mi sono pentito moltissimo di non essere andato alla Matematica dei Ragazzi cosicché al pomeriggio sono salito sul treno e sono andato a Trieste per partecipare, anche se non completamente, a questa esperienza... appena trovato il laboratorio, sono entrato e ho salutato tutti; i miei compagni mi hanno illustrato i loro lavori... Mi sono divertito tantissimo. Penso che il prossimo anno se non potrò partecipare alla Matematica dei Ragazzi perché cambierò scuola, perlomeno tornerò a visitare i vari laboratori."

"... prima non sapevo come funziona esattamente il computer al suo interno, ma grazie a questa esperienza ho approfondito l'argomento e questo mi dà molta soddisfazione. Inoltre l'esperienza di spiegare ad altri studenti le proprie conoscenze a volte è impegnativo, ma così mi sono messo alla prova e ho visto che posso spiegare ad altri cose che reputo interessanti."

"... la spiegazione della macchina a calcolo binario. I bambini più piccoli facevano fatica a capire, ma erano affascinati dalle biglie e dalle porticine che si aprivano. I ragazzi invece non erano molto interessati, ma per fortuna non erano tutti così e anche qualcuno di loro faceva fatica a capire."

"... le calcolatrici, quelle che hanno creato più problemi perché quando arrivava un gruppo di ragazzi si bloccavano e non sapevamo cosa fare, ma secondo me ce la siamo cavata al meglio perché siamo sempre riuscite a spiegare tutto senza che gli studenti si accorgessero."

"Per partecipare e spiegare le cose in maniera corretta abbiamo dovuto lavorare per molti giorni... tutta questa preparazione è stata molto faticosa, ma alla fine divertente specialmente quando ci si prendeva in giro a vicenda per gli errori che si facevano mentre si provava il discorso... a Trieste è stato anche faticoso perché abbiamo parlato con persone di ogni età: dai ragazzi delle superiori ai bambini di prima elementare e a questi ultimi è stato particolarmente difficile perché abbiamo dovuto spiegare argomenti impegnativi, come la numerazione binaria, in maniera più semplice possibile."

Uno stralcio dell'articolo scritto dai ragazzi stessi sull'esperienza vissuta (un'elaborazione a più mani) e pubblicato sul quotidiano "Il Piccolo":

"... la macchina ideata dal professor Corrado Bonfanti... Questa era una delle attrazioni preferite dalle scolaresche delle scuole elementari che rimanevano affascinate dal meccanismo di flip-flop e dalle dimostrazioni delle operazioni eseguite con il

sistema binario. Per esempio rimanevano stupiti dal fatto che nella numerazione binaria 1+1 desse come risultato 0 con il riporto di 1... I circuiti, con le lampadine che si accendevano e spegnevano, attiravano l'attenzione dei ragazzi che ci visitavano...
... All'inizio eravamo affascinati dal fatto di dover insegnare invece di imparare e allo stesso tempo impauriti di doverci confrontare con i nostri coetanei. Essere relatori ad un convegno è stata un'esperienza nuova, interessante ed emozionante che ci ha fatto capire quanto tempo ed energie sia necessario impiegare per riuscire a realizzare un lavoro valido, quanto sia faticoso il lavoro di un insegnante e come sia difficile lavorare in gruppo, ma anche quante soddisfazioni offra. Per preparare il meeting nel corso dell'anno scolastico abbiamo lavorato molto assieme alla professoressa Candussio e questo è stato fondamentale per la buona riuscita del progetto. Applicarsi tutti su un progetto comune ci ha dato anche l'occasione di conoscerci meglio e di scoprire lati nuovi del carattere dei nostri compagni... Insomma altro che scienza arida, come dice un vecchio luogo comune. La matematica è anche comunicazione."

Inoltre, nella presentazione pubblica di fine anno delle varie attività scolastiche, i ragazzi hanno predisposto una breve sintesi dell'esperienza, corredata da una serie di fotografie da loro stessi commentate.

"La matematica dei ragazzi" è sempre una delle esperienze scolastiche più significative vissute dai ragazzi, come dimostrato anche da quanto da loro espresso durante le prove dell'esame di licenza e dal suo inserimento nel portfolio delle competenze, nell'elenco delle attività più rilevanti.

Infine, un RINGRAZIAMENTO a tutti coloro che ci hanno aiutato nella realizzazione del lavoro e, in particolare, a Corrado Bonfanti, che, con la sua disponibilità e pazienza, mettendoci a disposizione i suoi preziosi materiali (in particolare, il calcolatore binario), ci ha dato l'opportunità di entrare in un mondo nuovo, impegnativo ma anche divertente, della matematica e di coglierne proficuamente alcuni aspetti fondamentali.

NOTE

*Scuola Media "Via Roma"
di Mariano del Friuli (GO),
I-34070 Mariano del Friuli
e-mail: agicam@libero.it

BIBLIOGRAFIA

AA.VV., *Guida introduttiva al CBL 2™*, Texas Instruments (manuale d'uso).

GIANGRANDI P. (a cura di), 2000, *Numeri e macchine: breve storia degli strumenti di calcolo*, Mathesis, Sezione di Udine.

Rivista: *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin", Paderno del Grappa, Vol. 28 A-B, N. 6.

SITI WEB

Il Museo dell'Informatica
www.dimi.uniud.it/cicloinf/museo

www.computermuseum.it/museum/index.htm

www5.indire.it:8080/set/informazione/mostra/index.html

www.vivoscuola.it/us/luisa.bortolotti/

www.pasco.com/experiments/earth/december_2002/home.html

www.cartesionline.it/argomenti/biologia_ud_respirazione_fotosintesi.cfm

www.ti.com/calc/italia/ipotesi.htm

www.ti.com/calc/docs/guides.htm

www.earth.google.com

www.worldofspectrum.org

www.elmeg.caserta.it/PR/02/PR02O.htm

www.parks.it/gps/istruzioni.html

Problemi di ricoprimento e ottimizzazione

Claudia Passagnoli*

Introduzione

Non è facile appassionare e coinvolgere i ragazzi con argomenti di matematica, ma, partendo dalla storia antica e da qualche leggenda, è molto più semplice. Se, poi, il personaggio principale è una donna e, per di più, una regina, il gioco è fatto! (È opportuno precisare che la classe IIC della Scuola Media "G. Stuparich" di Trieste, coinvolta nel 2006 nella preparazione del laboratorio per la manifestazione "La matematica dei ragazzi", è prevalentemente femminile!).

Partendo quindi dalla leggenda di Didone, ci siamo posti il problema di verificare qual è la forma più conveniente da applicare per ricoprire un'area, avendo a disposizione un perimetro ben definito, e, successivamente, risolto il primo quesito, ci siamo chiesti come mai la sezione delle cellette delle api fosse esagonale.

Gli obiettivi

Gli obiettivi che si intendevano raggiungere erano:

– di carattere matematico, ovvero il ripasso delle nozioni di area e perimetro e delle formule per il calcolo di aree e perimetri dei poligoni regolari e del cerchio, le applicazioni del teorema di Pitagora;

– di collegamento storico e scientifico, rivedendo, da una parte, la storia di Cartagine e, dall'altra, studiando il comportamento di alcuni insetti, quali api e bombi;

– di carattere trasversale, ovvero favorire la socializzazione, attraverso l'interazione tra pari, abituando gli allievi al lavoro di gruppo e alla collaborazione, e utilizzare inoltre l'occasione come momento per un'analisi che consenta agli allievi di conoscersi meglio e di valutare le proprie abilità, attitudini, paure e insicurezze.

Il lavoro di preparazione

Le sette fasi della preparazione del lavoro possono essere descritte come segue:

1. È stata lanciata una campagna di ricerca e tutti i ragazzi hanno raccolto del materiale su Didone e sulle api e lo hanno portato in classe.

2. Con lezioni di tipo frontale sono stati approfonditi gli argomenti di matematica correlati.

3. È stata eseguita un'analisi collettiva del materiale raccolto e sono stati collegialmente selezionati gli argomenti più significativi da proporre nel laboratorio.

4. Abbiamo stabilito collettivamente quante e quali dovessero essere le postazioni. I ragazzi hanno espresso le loro preferenze e predisposizioni e, in accordo con queste ultime, si sono autoassegnati il lavoro di competenza. Tutti sono stati concordi nel ritenere necessario che ciascuno dovesse essere in grado di trattare tutti gli argomenti presenti nelle postazioni.

5. Sono stati creati dei gruppi di lavoro per la realizzazione dei cartelloni e per la stesura dei principali concetti che si volevano esporre. In parallelo, sono state preparate, con dei cartoncini colorati, delle figure geometriche scomponibili e, con della stoffa somigliante alla pelle di bue, è stato realizzato il leggendario cuoio che doveva delimitare il territorio di Cartagine.

6. È seguita una lunga discussione collegiale sull'allestimento del laboratorio e sulle modalità di svolgimento delle attività e spiegazioni da dare in ogni postazione. In tale occasione sono anche stati rivisti e riformati i gruppi per le varie attività, seguendo competenze e affinità tra i vari ragazzi e i suggerimenti dati dall'insegnante.

7. Abbiamo, alla fine, affrontato la situazione più difficile per i ragazzi: le prove generali. Bisognava, infatti, mettere a punto le modalità di esposizione e verificarne i tempi. Questa fase è stata particolarmente laboriosa a causa della timidez-

za di molti alunni. Inizialmente, sembrava che essi avrebbero terminato le loro esposizioni in pochissimo tempo; poi, a ogni nuova verifica, sono diventati tutti più disinvolti e, alla fine, ci siamo ritrovati con il problema inverso: *"Abbiamo troppo poco tempo"*.

Le postazioni

Segue ora la descrizione del lavoro organizzato e poi svolto dai gruppi nelle sei postazioni del laboratorio realizzato durante la manifestazione "La matematica dei ragazzi". Le postazioni di lavoro erano così denominate:

- *La leggenda di Didone*
- *Le cellette dei bombi*
- *Ricoprimento con poligoni regolari*
- *La soluzione ottimale*
- *Giustificazione matematica*
- *Le cellette delle api*

Postazione 1. La leggenda di Didone

In questa postazione si ricordava la leggenda di Didone e come la regina sapesse che il cerchio è la figura con la maggior area tra quelle che hanno lo stesso perimetro.

Da un pezzo di stoffa di 88 cm x 50 cm era stata ottenuta una striscia lunga 4 m, corrispondente circa alla lunghezza di una circonferenza di raggio 2,23 m, e, considerato che Didone si posizionò su una baia e costruì un semicerchio, si calcolava che tale semicerchio dovesse avere un raggio di quasi 4,5 m, osservando che era quindi maggiore di tutta la nostra aula.

Postazione 2. Le cellette dei bombi

In questa postazione si illustrava con un cartellone la disposizione delle celle dei bombi, che sono di forma circolare, con notevole spreco di spazio, in quanto ogni cella ha in comune un solo punto con quelle a essa adiacenti. Da qui si traeva lo spunto per presentare il problema della tassellazione di una superficie senza lasciare spazi vuoti.

Postazione 3. Ricoprimento con poligoni regolari

Qui si verificava sperimentalmente, utilizzando diversi poligoni di cartone, che, per ottimizzare la copertura di una superficie piana con poligoni regolari, è necessario che la misura di ogni angolo interno sia contenuta un numero intero di volte in 360. Successivamente si osservava che si poteva limitare l'indagine al triangolo equilatero, al quadrato e all'esagono regolare, che soddisfano queste condizioni.

Postazione 4. La soluzione ottimale
Utilizzando un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono con lo stesso perimetro di 120 cm, qui si verificava sperimentalmente che, tra queste tre figure, l'esagono ha l'area maggiore e che inoltre produce un ricoprimento di una superficie piana senza lasciare spazi vuoti.

Postazione 5. Giustificazione matematica
Partendo di nuovo dai tre poligoni con lo stesso perimetro considerati nella postazione precedente e applicando il teorema di Pitagora, qui si verificava anche numericamente che l'esagono ha l'area maggiore tra le tre figure e che, quindi, basta un numero minore di tasselli a forma di esagono, rispetto a quelli delle altre forme considerate, per ricoprire una data superficie limitata.

Postazione 6. Le cellette delle api
La presentazione si concludeva con un altro richiamo all'antichità, citando Pappo, matematico alessandrino del III secolo, che faceva notare come la sezione esagonale dei favi delle api risolva un problema di ottimizzazione della pavimentazione di un piano, sfruttando il massimo rapporto area/perimetro offerto dall'esagono. Con questa soluzione si usa infatti la minima quantità di cera, a parità di contenuto di miele.

Lo svolgimento della manifestazione

Alla fine le tanto attese e "temute" giornate del 30 e 31 marzo sono arrivate! Considerando che la manifestazione si svolgeva presso il nostro Istituto (Istituto Comprensivo "Tiziana Weiss" di Trieste), abbiamo giocato "in casa", e questo ha influito molto positivamente sugli alunni.

Dopo le prime esposizioni un po' incerte e titubanti, i ragazzi si sono "sciolti"; hanno intrattenuto senza inibizioni i ragazzi delle superiori e mostrato un'incredibile pazienza con i bambini delle elementari, e il tempo è passato senza accorgersene.

Conclusioni

Sicuramente "La matematica dei ragazzi" ha migliorato, nell'ambito della classe, i rapporti tra compagni e le capacità di espressione e di esposizione.

I ragazzi si sono accorti che è molto più difficile imparare un argomento per spiegarlo agli altri che non acquisirlo per se stessi; hanno inoltre appreso la materia trattata in modo completo e chiaro e si sono divertiti ad affrontare i problemi matematici in un modo diverso e non codificato. Come conclusione, si può dire che anche chi, tra gli allievi, era stato inizialmente più scontroso e ostile nei confronti di questa attività, ha dovuto alla fine ammettere che lo svolgimento di questo progetto è stato un'esperienza piacevole e indimenticabile.

NOTE

* Scuola Media "G. Stuparich", Istituto Comprensivo "Tiziana Weiss", Strada di Rozzol, 61, I-34139 Trieste
e-mail:
giampaolo.cavicchi@libero.it

BIBLIOGRAFIA

BRIGAGLIA A., CIPOLLA M., INDOVINA G., 2004, *La matematica per crescere*, Palumbo, Palermo.

RUSSO L., 1996, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano.

SITI WEB

Dim. del teorema di Mac Laurin, *www.apicolturaonline.it*

Logica del computer e circuiti elettrici

Loredana Rossi*

Introduzione

Le esperienze presentate nel laboratorio "Logica del computer e circuiti elettrici" alla VI edizione di "La matematica dei ragazzi" sono state attuate da una seconda superiore del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste, sezione sperimentale di matematica e fisica. Per realizzare il progetto sono state utilizzate 20 ore extracurricolari, a cui i ragazzi erano tenuti a partecipare perché rientravano nel piano di recupero dei minuti persi con l'adozione dell'ora scolastica di 55 minuti, alcune ore curricolari e i due giorni della manifestazione.

L'argomento scelto, di fatto, dall'insegnante offriva molti spunti importanti da un punto di vista didattico: la possibilità di costruire oggetti che avevano funzioni matematiche, la possibilità di realizzare interamente il percorso didattico utilizzando solo lavori di gruppo, la possibilità di introdurre l'uso di un nuovo software (anche se relativo alla progettazione di circuiti) e tutto ciò si coniugava perfettamente, da una parte, con il corso di studi seguito dai ragazzi, dall'altra, con gli obiettivi della manifestazione.

Il corso sperimentale di matematica e fisica, inserito nel Piano Nazionale di Informatica, ha infatti come prerogativa l'approccio sperimentale e intuitivo alla matematica e alla fisica. L'approccio intuitivo è estremamente importante per la matematica e si realizza attraverso un lavoro interattivo in classe, l'uso di software adeguati, lavori di gruppo, ecc.; manca però nella routine, soprattutto alle superiori, la possibilità di realizzare sperimentazioni di matematica che coinvolgano la manipolazione, e sperimentare in matematica può voler dire, per esempio, costruire oggetti: strumenti di misurazione, macchine, giochi, … La costruzione di oggetti matematici è incredibilmente stimolante. Essa necessita, infatti:

- di una progettazione che tenga conto di quali scopi si vogliono perseguire;
- di diversi livelli di schematizzazioni (dal più teorico al più pratico);
- della realizzazione fisica dell'oggetto.

Tutto ciò coinvolge diversi tipi di conoscenze, stimola capacità, dà un senso concreto a un sapere troppo spesso teorico, astratto.

La realizzazione di questo laboratorio, che aveva come scopo principale la costruzione di circuiti elettrici che non solo schematizzassero i connettivi fondamentali, ma servissero anche a calcolare somme di bit, ha coinvolto diverse conoscenze teoriche:

- il sistema binario;
- la logica proposizionale e i circuiti logici;
- i circuiti elettrici (studiati in fisica).

Essa, inoltre, ha richiesto l'acquisizione di conoscenze complementari e strumentali agli obiettivi del laboratorio:

- il software didattico per disegnare e simulare circuiti logici LOGISIM[1];
- l'uso della strumentazione per la realizzazione dei circuiti, in particolare dei relè.

La metodologia

Tutti gli argomenti proposti, i materiali elaborati per la mostra, i circuiti, sono stati realizzati dai ragazzi lavorando in gruppo. Questi gruppi erano di 5 o 6 alunni e avevano un referente che doveva essere diverso di volta in volta. La composizione dei gruppi è cambiata spontaneamente varie volte, fin quasi alla fine. All'inizio, sembrava auspicabile che i gruppi assumessero una connotazione ben precisa, ma poi, in qualche modo, questa libertà li ha resi più produttivi, perché ciascuno studente ha trovato una collocazione in cui potersi esprimere con maggior libertà e serenità; ciò non era affatto secondario in questa classe che, sebbene presentasse esteriormente un comportamento ineccepibile, era logorata al suo interno da rapporti difficili, per la presenza di personalità complesse e particolari.

Per quanto riguarda lo studio degli argomenti teorici, sono state fornite, a ogni lezione, alcune schede orientative in cui si proponevano agli studenti esercizi, poche esemplificazioni, molte domande, si chiedeva loro di intuire metodi, trovare strumenti di controllo, raccogliere gli elementi per poi sviluppare la teoria, che doveva essere esposta, alla fine della lezione, dal referente di turno. C'è da dire, comunque, che tutti gli argomenti erano spezzettati e le difficoltà teoriche limitate; inoltre, alcuni temi, già trattati l'anno precedente, erano ben noti.

A ogni lezione, mediamente di due ore, si chiedeva all'inizio di fare il punto della situazione (ciò toccava ogni volta a un gruppo diverso), poi si distribuiva il nuovo lavoro da effettuare seguendo le indicazioni delle schede e con la supervisione dell'insegnante, possibilmente ridotta al minimo; l'ultima mezz'ora era dedicata alle relazioni di ciascun gruppo. Nei lavori di gruppo, soprattutto al pomeriggio, l'atmosfera è rilassata, i ragazzi socializzano molto (questo non è un aspetto trascurabile) e sono realmente produttivi per un tempo relativamente breve. Ci sono coloro che si fanno condurre dagli altri, coloro che pensano di sapere tutto anche quando sbagliano, coloro che ostinatamente vogliono lavorare da soli. Il mio ruolo è stato solo quello di osservare, mai intervenire nelle dinamiche interne dei gruppi, se non nella scelta del referente. Di solito, sceglievo uno di quelli che cercavano di fare il meno possibile, in modo da responsabilizzarlo e farlo stare più attento. Quando i lavori di gruppo si articolano per un tempo sufficientemente lungo, i ruoli all'interno dei gruppi sono, comunque, destinati a diventare intercambiabili: chi si è fatto guidare può diventare, a un certo punto, il trascinatore, e viceversa.

Il percorso didattico

Il percorso didattico si è svolto attraverso le sei fasi di seguito descritte.

Fase 1. Una sola lezione è stata dedicata all'inquadramento generale di tutto il percorso, iniziando da una breve storia delle macchine calcolatrici e di come si sono evolute. Si è voluto mettere in evidenza che la struttura logica del funzionamento del computer è rimasta fondamentalmente la stessa e si è illustrato lo scopo del laboratorio: penetrare in un microprocessore e capire come con i circuiti si possono fare i calcoli.

Fase 2. In questa fase si è voluto capire quali calcoli fa il computer e con quali numeri. I lavori di gruppo sono serviti a imparare a gestire con disinvoltura il sistema binario: il passaggio dalla base due alla base dieci e viceversa, le addizioni, le sottrazioni, le moltiplicazioni, le divisioni. Il punto in cui i ragazzi hanno incontrato più difficoltà è stato l'elaborazione di un metodo per il passaggio automatico dalla base dieci alla base due; per il resto, tutto è apparso loro piuttosto facile.

Fase 3. È stata ripresa la logica proposizionale, argomento che era stato trattato l'anno precedente e che rappresentava l'anello di congiunzione fra il calcolo binario e la costruzione di circuiti logici. La scheda proposta ai ragazzi, riportata qui di seguito, richiamava le conoscenze pregresse e serviva alla comprensione di questo passaggio:

Calcolo proposizionale

Ogni variabile proposizionale può assumere 2 valori di verità: $V - F$. *Può essere anche considerata come una variabile che assume i valori 1 e 0:*

$$V \rightarrow 1$$
$$F \rightarrow 0$$

Per quanto già studiato, le variabili proposizionali si possono comporre con i connettivi logici:

$\neg$ (non/not), $\wedge$ (e/and), $\vee$ (o/or), $\dot{\vee}$ (o…, o…/xor),
$\rightarrow$ (se … allora), $\leftrightarrow$ (se e solo se)

Si possono considerare fondamentali : $\neg$ (not), $\wedge$ (and), $\vee$ (or).

– *Scrivi le tavole di verità di* p $\wedge$ q, p $\vee$ q, p $\dot{\vee}$ q, *nelle variabili proposizionali* p *e* q.
  Date 2 variabili proposizionali p *e* q, *quante proposizioni composte, fra loro non equivalenti, si possono ricavare ? (Ricorda, ci si rifà alle tavole di verità.)*

p	q	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

– *Scrivi tutte le formule con* p e q *e i connettivi* $\neg$ (not), $\wedge$ (and), $\vee$ (or), *che corrispondono ai valori di verità della tabella.*

– *Se* p *e* q *sono due bit, prova a interpretare, osservando le tavole di verità, quali colonne corrispondono all'operazione di* addizione *della coppia di bit. Si deve considerare solo una colonna o due, e perché?*

– *Se* p *e* q *sono due bit, prova a interpretare, osservando le tavole di verità, quali colonne corrispondono all'operazione di* moltiplicazione *della coppia di bit. Si deve considerare solo una colonna o due, e perché?*

– *Prova a rappresentare il circuito logico che corrisponde a* "p and q".

– *Prova a rappresentare il circuito logico che corrisponde a* "p or q".

– *Prova a rappresentare il circuito logico che corrisponde a* "p xor q".

Alla fine del lavoro, ai ragazzi era chiaro che "p and q" dà la moltiplicazione di due bit, mentre, per esprimere la somma di due bit, bisogna considerare due colonne, una per la prima cifra del risultato, data da "p xor q", l'altra per il riporto, in questo caso la seconda cifra del risultato, data da "p and q", come nella seguente tabella:

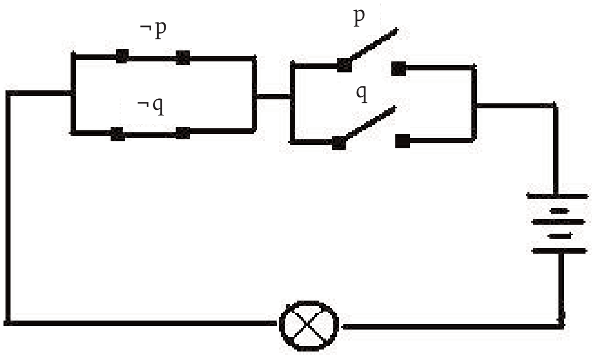
p	**q**	**p** and **q** = moltiplicazione	**p** and **q** **p** xor **q** = somma	
1	1	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	0

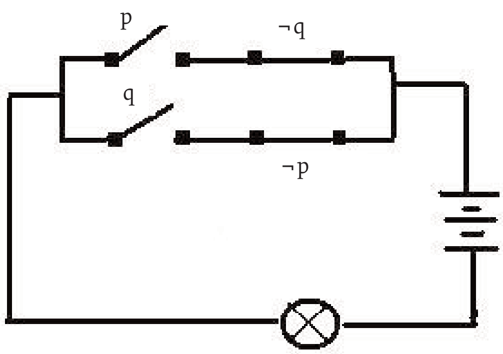
Inoltre dai lavori di gruppo erano emersi diversi modi per esprimere il connettivo "p xor q" attraverso i connettivi fondamentali e i relativi circuiti logici, come segue:

a) $\neg (p \leftrightarrow q) \;=\; \neg [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \;=\; \neg [(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)]$

b) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

c) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$



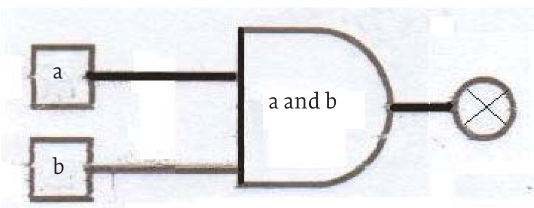


Come si osserva, nei circuiti logici le variabili proposizionali sono rappresentate da “porte” (chiamate infatti “porte logiche”) o interruttori che possono avere solo due stati (aperto/chiuso, 0/1): si ritrova perciò in questi circuiti la stessa logica binaria.

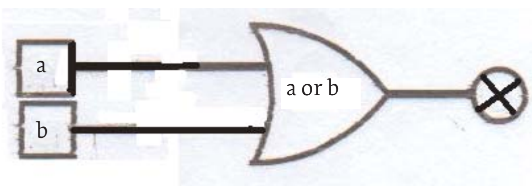
I ragazzi, che conoscevano il funzionamento dei circuiti elettrici, avendoli studiati in fisica, hanno subito osservato una differenza importante fra i circuiti logici relativi ai connettivi *and* e *or*, che sono semplici circuiti con le porte, rispettivamente, in serie ed in parallelo, e i circuiti che rappresentano il connettivo *xor*, in quanto questi ultimi, pur rappresentabili in via teorica come negli esempi indicati, da un punto di vista pratico non sembravano realizzabili, perché la stessa porta si ripresentava più volte. Questo era un punto importante che stimolava la curiosità.

Da questo momento in poi, ci siamo concentrati sull’operazione di somma, per semplicità, ma anche perché essa è fondamentale nel calcolo binario, in quanto sia la moltiplicazione, sia la sottrazione sono riconducibili a somme.

FASE 4. Il passo successivo è stato quello di ampliare il discorso sui circuiti logici attraverso il software LOGISIM. L’uso di questo programma prevede l’utilizzo delle porte logiche AND, OR, NOT e si allontana dalla schematizzazione precedente dei circuiti, ma ha reso comprensibile ai ragazzi come da una somma di due bit si possa passare alla somma di numeri composti da tanti bit, attraverso la semplice modularizzazione del processo. Ciò era importante perché questa è la logica con cui i computer eseguono i calcoli e ha permesso anche di far osservare perché nel calcolo computerizzato ci sono dei limiti, oltre i quali i risultati non sono più attendibili. Si è partiti dai seguenti schemi di circuiti logici :

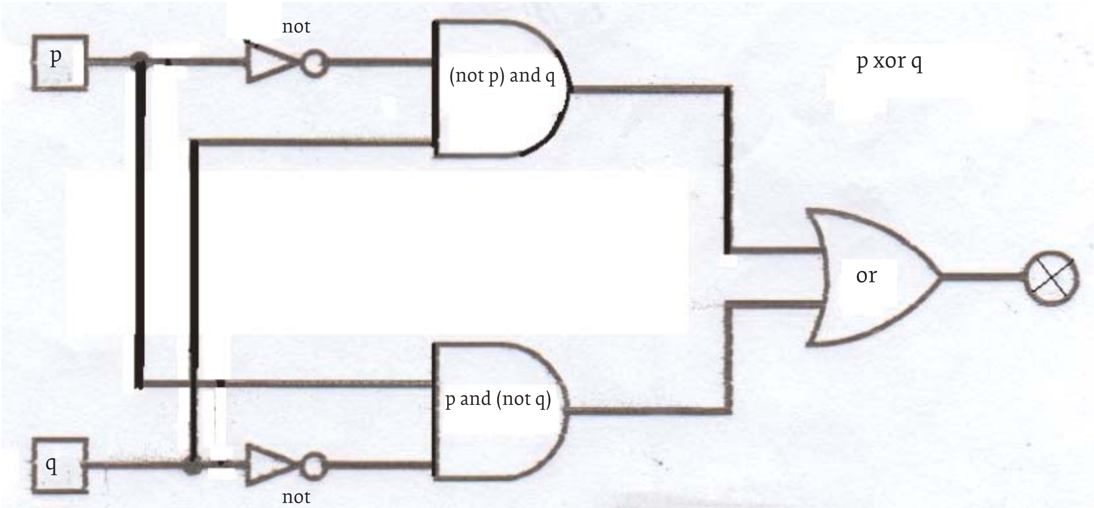


AND

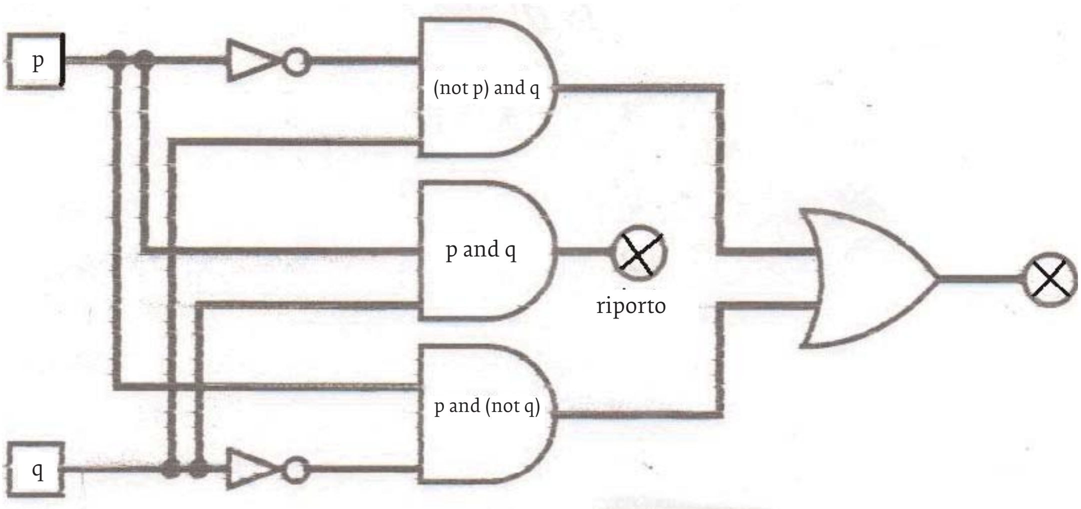


OR

I circuiti logici per il connettivo *xor* sono stati poi realizzati nei tre modi individuati dai gruppi: analizzando gli schemi, i ragazzi hanno convenuto che risultava più chiaro quello relativo alla formula $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.



Si è poi ottenuto il seguente circuito per la somma di due bit:



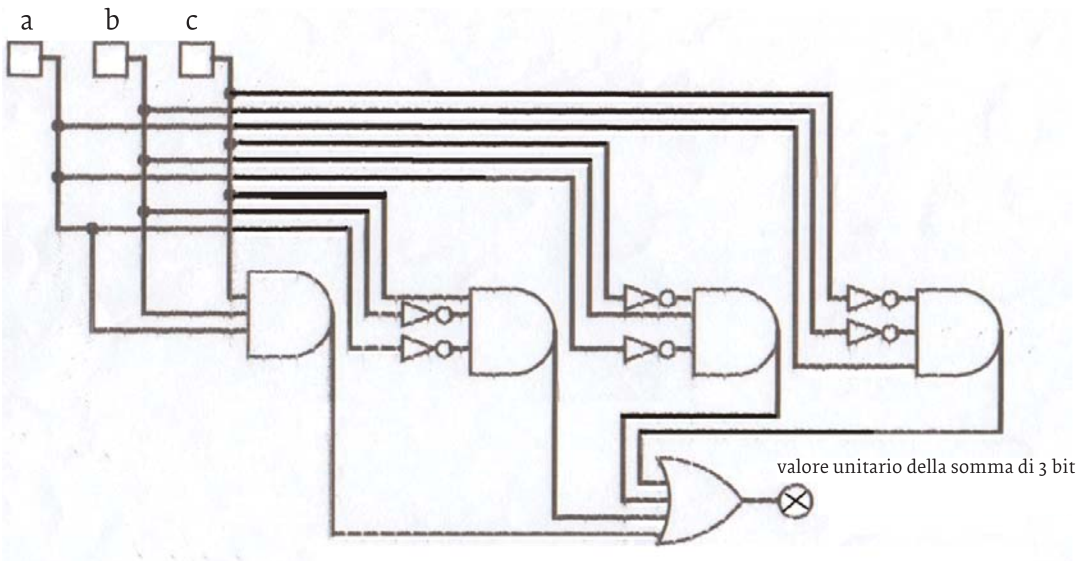
Fase 5. A questo punto bisognava esplorare le altre possibilità, cioè la somma di 3 bit e la somma di numeri composti da più bit. Le due cose sono strettamente collegate, perché, sommando due numeri composti da più bit, in ogni colonna al massimo si addizionano 3 bit, i bit della colonna corrispondente più l'eventuale riporto. La somma di 3 bit prende in esame tre variabili proposizionali *a*, *b*, *c* e l'elaborazione di proposizioni più complesse delle precedenti, desunte dalla seguente tabella di verità:

a	*b*	*c*	*Riporto-somma*	
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

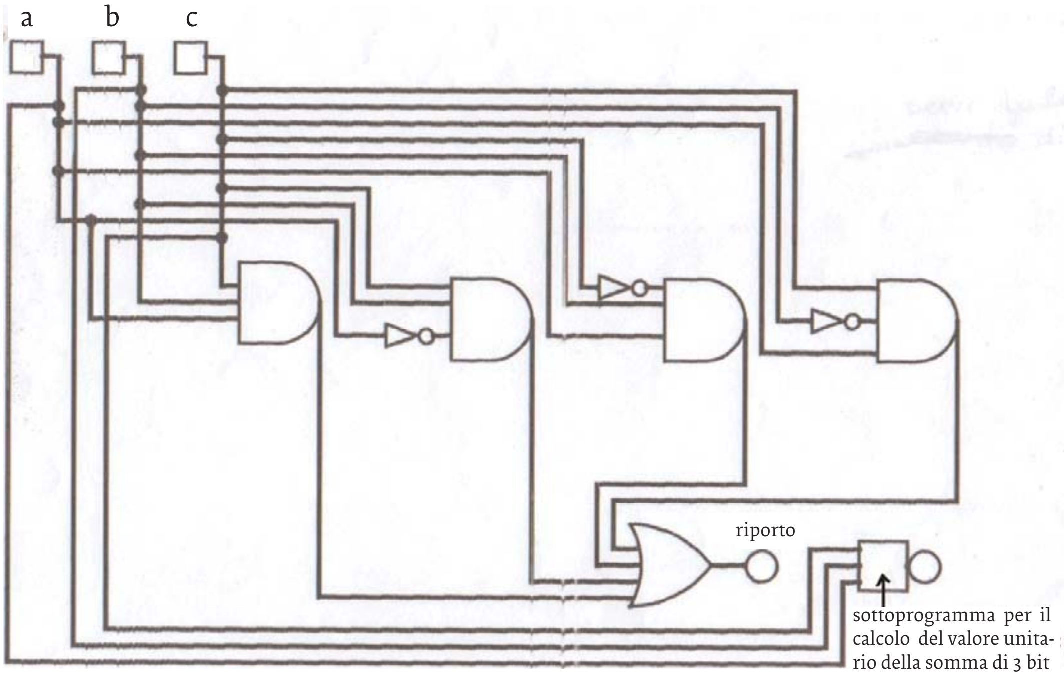
Ragionando su espressioni formate dalla disgiunzione di fattori in forma canonica, gli studenti hanno ottenuto che la somma si può esprimere come segue:

prima cifra della somma	$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$
seconda cifra (riporto)	$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$

In corrispondenza, si è trovato il circuito per calcolare il valore unitario della somma di 3 bit, che è stato poi utilizzato come modulo per costruire il circuito completo. Modularizzando il processo, si è infine ottenuto lo schema generale per la somma di due numeri binari *a* e *b*.



Circuito per il calcolo del valore unitario della somma di 3 bit



Circuito completo per il calcolo della somma di 3 bit

Per raggiungere questi risultati, sono partita mostrando agli allievi col videoproiettore alcuni semplici esempi; poi i ragazzi hanno preso in mano la situazione, elaborando via via i circuiti richiesti. Discussioni e difficoltà si sono presentate all'inizio, per individuare le espressioni che corrispondono alla somma di 3 bit; per il resto, i ragazzi hanno saputo lavorare autonomamente, anche perché l'utilizzo di sottoprogrammi era una pratica già acquisita con altri software, e, una volta conosciute le tecniche per realizzare ciò con questo programma, si sono destreggiati benissimo, mostrando, inoltre, di curare i circuiti anche da un punto di vista grafico, facendo molta attenzione ai collegamenti e al loro ordine. La cosa mi ha molto stupito, perché, al contrario, i miei esempi erano piuttosto caotici.

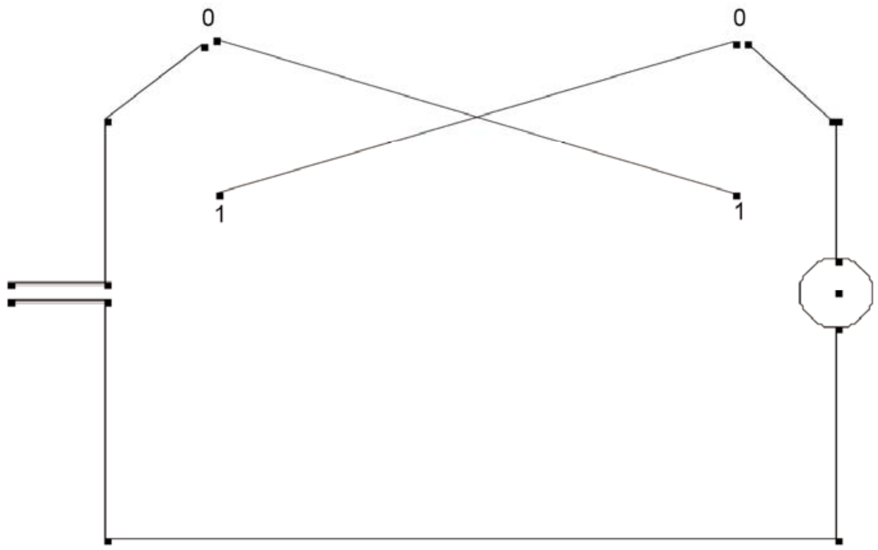
Fase 6. L'ultimo obiettivo ora era quello di costruire materialmente i circuiti. A questo punto, si è tornati alla schematizzazione classica. Sono stati costruiti diversi tipi di circuiti:

a) con porte visibili, per i circuiti AND, OR, XOR;
b) con porta visibile ed un relè per il NOT;
c) con 2 deviatori (doppi) per il circuito che somma 2 bit;
d) con 3 deviatori (doppi) e un relè (doppio) per il circuito che somma 3 bit.

I ragazzi si sono nuovamente divisi in gruppi e a ognuno è stata assegnata la responsabilità di un circuito diverso, fornendo loro tutta la strumentazione: tavolette di legno, supporti per gli interruttori, pile, fili diversamente colorati, a seconda che si collegassero al polo positivo o negativo della pila, gancetti per le porte, portalampade, lampadine, anellini per i collegamenti, chiodi con punta grossa, piccole viti, relè, deviatori e gli attrezzi necessari. Ogni gruppo aveva lo schema da seguire; per i circuiti più complessi (*c* e *d*), questi sono stati forniti dall'insegnante. Nella realizzazione pratica, gli studenti hanno voluto lavorare autonomamente, mostrandosi gelosi del loro lavoro e molto ordinati. Hanno gradito l'aiuto, soprattutto per le saldature, di un collaboratore scolastico, che si è prestato a dare una mano ai ragazzi, avendo anche una preparazione tecnica. Di fronte a ogni problema, sono sempre stata l'ultima a essere interpellata, e ciò è accaduto raramente.

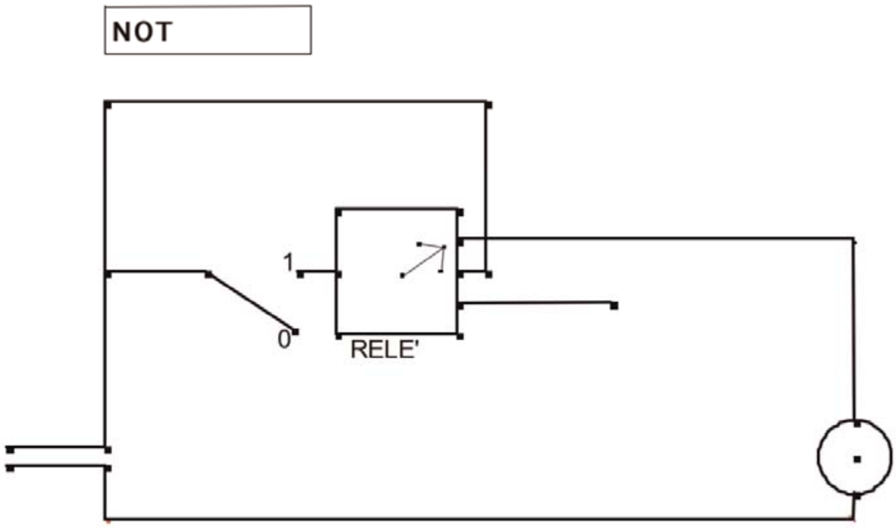
Segue la descrizione dei circuiti realizzati:

a) In questi circuiti le porte sono state realizzate con gancetti metallici che si aprono e chiudono manualmente, rendendo palese il funzionamento del circuito. Il problema relativo al connettivo "XOR" è stato superato con l'artificio di incrociare i fili, anche se, come si vedrà successivamente, i deviatori collegati opportunamente possono realizzare lo stesso effetto.



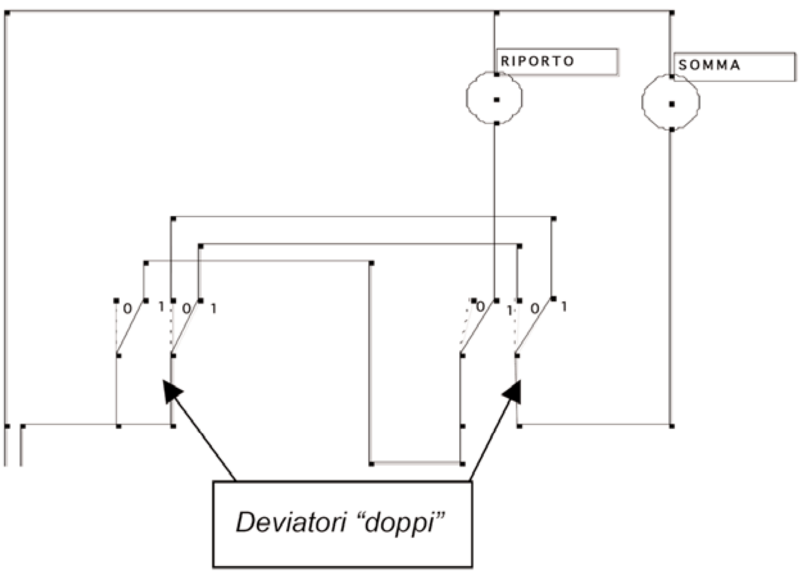
Circuito XOR

b) In questo circuito, a fronte di una chiusura del circuito, l'effetto è in realtà l'opposto, cioè la lampadina non si accende. Per ottenere ciò, è stato inserito un relè, cioè un dispositivo elettromagnetico che, se collegato opportunamente, fa scattare una levetta capace di disinserire il circuito.



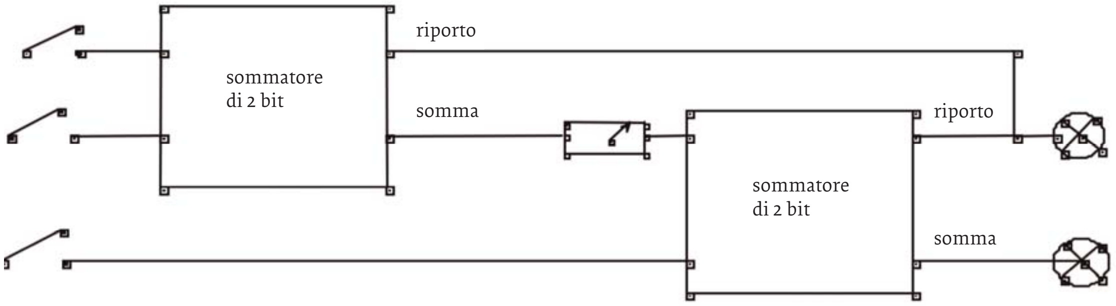
Circuito NOT

c) Questo era uno dei circuiti più impegnativi, per realizzare il quale era importante che i ragazzi capissero il funzionamento del deviatore "doppio": un unico interruttore che agisce parallelamente su due circuiti attraverso le sue doppie porte. Ciò era indispensabile per coordinare due circuiti, AND e XOR, attraverso due soli interruttori. Ecco, da un punto di vista pratico, come si è risolto il problema per la somma di due bit. Come si vede dallo schema seguente, le "prime porte" dei due deviatori sono collegate in modo tale che solo la posizione 1-1 fa accendere la lampadina del riporto, mentre le "seconde porte" presentano i collegamenti incrociati come in un circuito XOR, cosicché solo i valori 1- 0 0 0-1 fanno sì che si accenda la lampadina della somma.



Circuito per la somma di due bit

d) Per la costruzione del "sommatore di 3 bit" è stata presentata ai ragazzi solo la seguente schematizzazione, per insistere sul concetto di struttura modulare e per presentarlo loro come una sfida:



L'elemento che permette di collegare i due sottocircuiti è un relè "a doppia uscita". Due allievi, che si sono impegnati nella realizzazione del circuito, hanno studiato attentamente il modo in cui collegare il relè agli altri elementi e, dopo alcuni tentativi, sono riusciti nel loro intento.

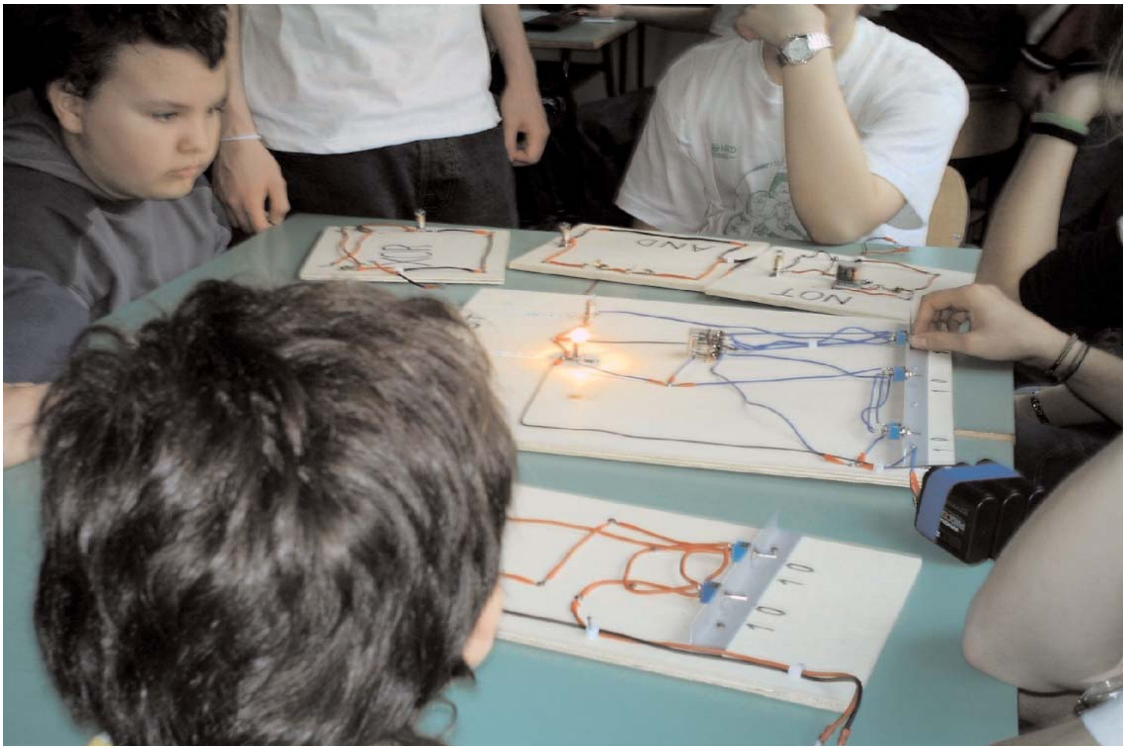
L'organizzazione del laboratorio

Concluso il percorso didattico, era venuto il momento di stabilire su che cosa ciascun allievo avrebbe relazionato il giorno della manifestazione; deciso ciò, ogni gruppo doveva concentrarsi su quell'argomento e pensare a predisporre i materiali, che avrebbero aiutato gli studenti ospiti a seguire il percorso che loro stessi avevano compiuto, fino alla costruzione dei circuiti.

In questa manifestazione ciò è un aspetto molto importante: i ragazzi che entrano nel laboratorio devono capire facendo, provando, giocando. Su questo principio ci siamo basati per l'allestimento dei materiali, che sono stati però suggeriti da me, nonostante sarebbe stato auspicabile un contributo di idee ben più significativo da parte dei miei studenti. Essi sono stati, invece, creativi nell'esecuzione, trovando soluzioni originali da un punto di vista pratico ed estetico.

L'ultimo aspetto da curare era la parte esplicativa, cioè la modalità con cui i ragazzi avrebbero presentato gli argomenti, accompagnandoli con giochi ed esperienze, e quale linguaggio avrebbero usato, tenendo conto del livello degli ospiti, che potevano frequentare le elementari, le medie o le superiori. È stato quindi chiesto ai vari gruppi di preparare delle schede in cui, per punti, essi dovevano evidenziare quali cose avevano deciso di riferire sull'argomento a loro assegnato, con riferimento ai tre livelli di approccio. Poi i vari gruppi si sono preparati dialogando ad alta voce fra loro, per non più di tre ore, e, in seguito, un gruppo per volta ha relazionato a me; ho dato loro qualche consiglio, qualche suggerimento, ma sostanzialmente tutto andava bene. Questa grande autonomia e sicurezza, devo dire, mi ha sorpresa molto positivamente. Inoltre, durante la manifestazione, i ragazzi si sono organizzati in modo che, a turno, ognuno di loro avesse l'opportunità di partecipare, per cui nell'arco della visita di ogni classe, che durava al massimo trenta minuti, tutti intervenivano almeno una volta, inserendosi prontamente nel discorso del compagno precedente.

All'ingresso degli studenti nell'aula, una ragazza aveva il compito di esporre un breve sunto in cui veniva presentato il laboratorio, richiamando alcuni riferimenti storici e introducendo gli ospiti in questo mondo di bit, luci e circuiti. Poi gli ospiti venivano fatti accomodare intorno ai tavoli e ogni 7-8 minuti si ruotava.



Nel laboratorio erano organizzate quattro postazioni:

Postazione 1 – sul calcolo binario
Per presentare il calcolo binario sono stati approntati dei tabelloni muniti di tessere, con cui si proponevano ai visitatori esercizi di calcolo binario, dopo aver spiegato loro in cosa consiste la scrittura posizionale dei numeri, in particolare nel sistema binario.

Postazione 2 – sulla logica
Nel presentare la logica i ragazzi hanno fatto molta attenzione a riallacciarsi agli altri argomenti, il sistema binario e i circuiti elettrici, mostrando i cartelloni, spiegando alla lavagna e, per i più piccoli, proponendo una rivisitazione del

gioco “Indovina chi”, in cui le caratteristiche dei personaggi sono state messe in relazione con l’uso dei connettivi logici. In questo gioco i bambini dovevano rispondere “vero” o “falso” alle domande dei compagni, facendo molta attenzione ai connettivi.

Postazione 3 – sul programma di logica LOGISIM

Nella terza postazione si presentava il programma LOGISIM e i circuiti logici realizzati con questo, dal più facile al più complesso. Il programma ha la caratteristica di dar vita, con un gioco di colori, ai circuiti, che sembrano accendersi effettivamente, ed è quindi estremamente accattivante. Ai più piccoli venivano proposti solo i circuiti più semplici e poi venivano invitati a provare, aiutandoli nelle loro costruzioni.

Postazione 4 – sui circuiti elettrici

La postazione più significativa era ovviamente quella dei circuiti elettrici, nella quale questi venivano dettagliatamente illustrati: gli studenti visitatori potevano provarli rendendosi conto materialmente, in realtà, non tanto dei meccanismi, quanto degli effetti.

Osservazioni conclusive

La metodologia di lavoro adottata ha dilatato moltissimo i tempi. L’abilità di lavorare in gruppo, infatti, si acquisisce con il tempo. Il lavoro di gruppo, se usato solo sporadicamente, non dà i risultati sperati, perché i ragazzi all’inizio devono prima imparare a integrarsi e si devono innestare determinate dinamiche. Inoltre, l’insegnante è generalmente convinto che una lezione frontale ben congegnata e partecipata dia gli stessi risultati in termini di comprensione in metà tempo, e accade quindi che questa metodologia venga presto abbandonata. Ma quali possono essere i vantaggi che se ne ricavano? A mio parere sono fondamentalmente tre.

In primo luogo, la capacità di lavorare insieme è un’abilità nient’affatto secondaria che i ragazzi devono acquisire per entrare nel mondo del lavoro; questo vale sia per quelli bravi, che rischiano di diventare degli individualisti che potrebbero mal integrarsi nei rapporti lavorativi, sia per gli altri, che dovranno cercare di imparare anche da persone poco disponibili, curando i rapporti umani e affinando le capacità relazionali.

Il secondo vantaggio consiste nel fatto che l’apprendimento diventa, in questo tipo di percorso, una responsabilità personale: i ragazzi, con un lavoro fra pari, capiscono che possono imparare molto autonomamente, riflettendo da soli e insieme ai compagni.

Il terzo vantaggio sta nel fatto che in tali condizioni i ragazzi, pur essendo stati guidati durante il percorso, hanno una modalità di apprendimento propria, perché si devono confrontare con i compagni a parole e, per farlo, devono adottare un linguaggio non formale, sul quale l'insegnante non ha alcun controllo, e che fa da intermediario fra i concetti vecchi e quelli nuovi. Ciò li rende più consapevoli in merito al loro apprendimento, attivando dei processi metacognitivi.

Desidero infine presentare il commento di un ragazzo che, volendo descrivere il mio ruolo per la preparazione del laboratorio, si è limitato a dire che avevo lavorato "*ben poco*". In questa avventura i ragazzi si sono sentiti gli attori principali di tutto il percorso; per loro non sono stata nemmeno il regista della rappresentazione, ero ai lati della scena ed essi hanno scherzato, lavorato e anche compreso insieme, senza quasi sentire la mia presenza. In classe non è proprio così, sono io l'attore principale, io il regista e i ragazzi sono troppo spesso soltanto gli spettatori.

NOTE

* Liceo Scientifico Statale
"G. Galilei", via Mameli, 4,
I-34100 Trieste
e-mail: rossilori1959@libero.it

1 Il software LOGISIM
è distribuito liberamente
(http://ozark.hendrix.edu/
~burch/logisim/)

BIBLIOGRAFIA

GIANGRANDI P., 2005, "I mattoni elementari del computer", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 28 A-B, (6), pp. 557-576.

GIANGRANDI P. (a cura di), 2000, "Numeri e macchine: breve storia degli strumenti di calcolo", *Mathesis*, Sezione di Udine.

PESCI A., 2004, "Insegnare ed apprendere cooperando: esperienze e prospettive", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27 A, (6).

ROSSETTO S., 2005, "Numeri e algoritmi con il calcolatore, come la tecnologia scopre e riscopre algoritmi aritmetici", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 28 A-B, (6), pp. 611-619.

Numero irrazionale Φ

Jadranka Santi*

Introduzione

Ho preso parte all'edizione 2006 della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi d'esperienze tra coetanei" con la classe II B del Liceo Scientifico con lingua d'insegnamento slovena "France Prešeren" di Trieste. La classe è composta da nove allievi, due femmine e sette maschi. Dopo aver discusso con gli studenti sui possibili temi da presentare e aver ascoltato le loro opinioni, la scelta è caduta sul numero irrazionale Φ. Tale tema mi è sembrato particolarmente adatto poiché tocca molte delle conoscenze curricolari del biennio del liceo scientifico. D'altro canto, i ragazzi sembravano interessati ad approfondire tale materia, da loro scoperta attraverso la lettura del thriller *Il Codice Da Vinci* di Dan Brown.

Stabilito il tema, i ragazzi hanno provveduto alla ricerca del materiale, usando prevalentemente Internet. Il materiale recuperato era però troppo vasto perché i ragazzi riuscissero a rielaborarlo completamente da soli. L'ho sistemato dunque personalmente e ho compilato una dispensa, che è servita ai ragazzi per prepararsi alla manifestazione. La stessa è stata poi distribuita anche ai visitatori durante l'incontro.

Per presentare i contenuti, ho stabilito assieme ai ragazzi che essi si sarebbero divisi in tre gruppi di tre studenti ciascuno e che avrebbero preparato così tre laboratori. Per ogni gruppo, ho scelto un responsabile che avesse il compito di organizzare e coordinare il lavoro. I ragazzi sono stati lasciati liberi di trovare il modo migliore per presentare i contenuti. Osservandoli durante questi preparativi, ho notato con gioia che i responsabili distribuivano in modo equo tra i membri del gruppo il lavoro e gli argomenti da presentare e motivavano i compagni, specialmente quelli meno diligenti, rendendosi conto che il successo dipendeva dalla preparazione di tutti.

Nella seconda parte dei preparativi, abbiamo realizzato i cartelloni con l'illustrazione dei contenuti e vario materiale didattico indispensabile per spiegare in modo conciso gli argomenti, che erano, tutto sommato, abbastanza ostici. In questa occasione, gli studenti hanno imparato anche a realizzare varie costruzioni geometriche con il software *Cabri Géometrè*.

Infine, prendendo in considerazione le conoscenze dei possibili visitatori a vari livelli scolastici, abbiamo scelto quali temi presentare ai bambini delle scuole elementari e quali ai ragazzi delle medie e delle superiori.

Passo ora a spiegare in che modo i ragazzi hanno illustrato i numeri di Fibonacci ai visitatori.

I Numeri di Fibonacci e la Sezione Aurea

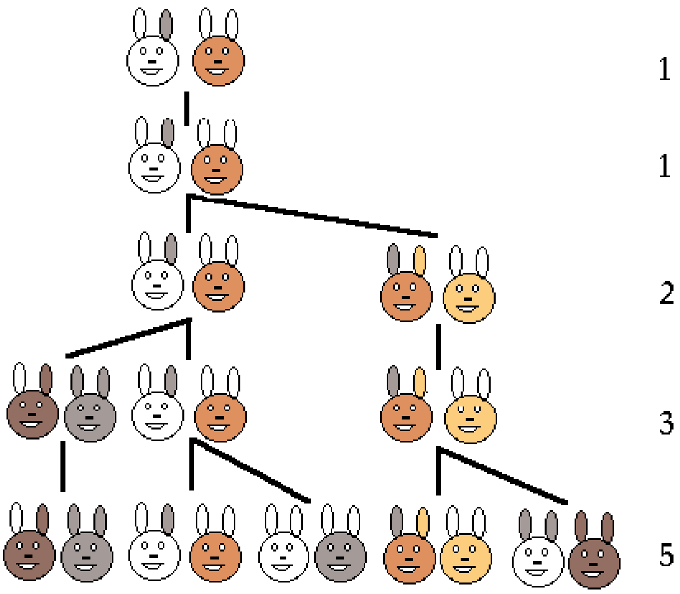
Bisogna premettere che i ragazzi erano inizialmente molto perplessi alla scoperta che avrebbero dovuto spiegare quanto da loro appreso anche ai bambini delle elementari. Ma, di fronte agli scolari che li guardavano con curiosità, si sono ben presto immedesimati nel ruolo di insegnanti, raccontando i contenuti in modo semplice e accattivante.

Alla fine del meeting, fatto il resoconto dell'esperienza, i ragazzi erano tutti d'accordo sul fatto che fosse molto meglio lavorare con dei bambini piccoli, curiosi e attivi, piuttosto che con degli adolescenti, che, a volte, sembrano venuti alla manifestazione perché costretti dai loro insegnanti.

L'introduzione al laboratorio dedicato ai numeri di Fibonacci partiva con dei cenni storici sulla figura di Fibonacci, per poi trattare la sua opera più nota, il *Liber Abaci*. Si passava poi a illustrare il "problema dei conigli", come segue.

> *Uno dei problemi più famosi del* Liber Abaci *si trova nelle pagine 123-124 dell'edizione del 1228 e recita:*
> *"Quanti conigli produce una coppia di conigli in un anno?"*
> *Si parte raccontando che una coppia di conigli di un mese d'età fu posta in un recinto per determinare quanti conigli potessero essere prodotti da questa coppia in un anno, supponendo che ogni mese ogni coppia ne creasse un'altra, la quale dal secondo mese in poi diventa produttiva. Si suppone inoltre che i conigli durante l'anno in cui sono osservati non muoiano.*
> *Poiché la prima coppia ha figliato nel primo mese, il numero raddoppia, e alla fine del primo mese si hanno due coppie. Di queste, una coppia, la prima, figlia nel secondo mese, in modo che alla fine del secondo mese le coppie sono tre. Di queste coppie,*

due figliano nel mese seguente, in modo che alla fine del terzo mese sono nate altre due coppie: il numero sale così a cinque. Iterando questo procedimento, si vede che dopo un anno si hanno 377 coppie.
Se si osserva la figura, da noi trovata in rete, si può vedere come siamo arrivati a questo risultato. Siamo partiti sommando il primo numero al secondo numero ottenuto, cioè 1 a 2, poi il secondo al terzo e il terzo al quarto, e così di seguito, fino a che non abbiamo addizionato l'undicesimo e il dodicesimo numero ottenuto, cioè 144 e 233, e di conseguenza abbiamo calcolato il numero totale delle coppie di conigli in questione, 377, da cui si può ricavare la risposta al quesito.
La successione: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... viene chiamata "successione di Fibonacci".



Visto che spiegare tale problema è risultato noioso, i ragazzi hanno pensato di preparare un cartellone su cui incollare le nuove coppie di conigli che man mano "nascevano". In questo modo la spiegazione è diventata molto più divertente e comprensibile anche per i bambini piccoli.

Dopo questa introduzione, i visitatori delle medie e delle superiori scoprivano, guidati dai narratori, che cos'è una successione in generale, come si genera la successione di Fibonacci, alcune sue proprietà e come la successione dei rapporti di due numeri successivi della successione di Fibonacci tende ad un numero irrazionale, indicato con Φ.

Quest'ultima proprietà veniva poi verificata, con l'aiuto di una calcolatrice, dai visitatori, che trovavano alcuni valori del rapporto f_n/f_{n-1} come quelli illustrati nella Tabella 1.

I ragazzi hanno ben presto osservato che l'attenzione dei visitatori calava se essi non venivano opportunamente coinvolti durante l'esposizione dei contenuti teorici, e quindi hanno imparato a porre delle domande e a destare così l'interesse dei coetanei.

Finita l'esposizione della parte teorica, i ragazzi proponevano un problema legato all'equiscomponibilità delle figure piane. Preso un quadrato di lato 8 e quindi di area 64, scomponendo la figura in modo opportuno e ricomponendola, si può ottenere, apparentemente, un rettangolo di lati 13 e 5, e quindi di area 65. Proponendo il problema con il supporto di un modello di cartone, il quadratino che avanza si mimetizza molto bene e, per un attimo, i visitatori restavano veramente senza parole. In realtà, questo problema è legato strettamente a una delle proprietà fondamentali della successione di Fibonacci: il quadrato di un qualsiasi termine della successione differisce di 1 dal prodotto del termine precedente con quello successivo. In questo caso, si ha: $8^2 = 5 \times 13 - 1$.

f_n	f_n/f_{n-1}
1	
1	1,00000000
2	2,00000000
3	1,50000000
5	1,66666667
8	1,60000000
13	1,62500000
21	1,61538462
34	1,61904762
55	1,61764706
89	1,61818182
144	1,61797753
233	1,61805556
...	...

Tabella 1

A questo punto, si passava a illustrare dei casi in cui la successione è presente in natura. Questa parte era spiegata prestando ovviamente attenzione al linguaggio che veniva utilizzato e che doveva essere adeguato all'età dei vari ascoltatori, a tutti i visitatori. Si portavano i seguenti esempi, illustrandoli con delle figure o con modelli concreti:

– Molte piante hanno un numero di petali corrispondenti a numeri di Fibonacci. Il lilium e l'iris ne hanno 3, la rosa selvaggia e l'aquilegia 5, il delphinium 8, la cineraria 13, ecc. In marzo, questi fiori non fioriscono, perciò ci siamo limitati a mostrarne ai visitatori alcune foto.

– La crescita dell'achillea ptarmica segue uno schema ben preciso: ogni ramo impiega un mese prima di potersi biforcare. Al primo mese, quindi, c'è 1 ramo, al secondo 2, al terzo 3, al quarto 5, e così via. In questi numeri si riconosce subito la successione di Fibonacci.

– I pistilli dei fiori spesso sono disposti secondo uno schema preciso, formato da spirali, il cui numero corrisponde a uno della serie di Fibonacci. Ciò permette loro di essere uniformemente sparsi e non troppo ammassati al centro.

– Nel tagliare un frutto, spesso ci troviamo di fronte a un numero di Fibonacci. Ad esempio, la banana ha 3 sezioni, mentre la mela ne ha 5.

– Le foglie sui rami di numerose piante sono disposte in modo da presentare alcuni numeri della sequenza di Fibonacci. Le foglie sono disposte sui rami in modo tale da non sovrapporsi l'una all'altra per permettere a ciascuna di ricevere la luce del sole. Se prendiamo come punto di partenza la prima foglia di un ramo e passiamo di foglia in foglia in senso orario o antiorario, il numero di giri che compiremo prima di trovare una foglia sovrapposta a quella di partenza corrisponde sempre a un numero di Fibonacci. Due esempi di tale crescita sono stati illustrati costruendo dei modelli. Uno di essi rappresentava la crescita di una pianta, cioè lo stelo con le foglie intorno. L'altro, invece, rappresentava una pianta vista dall'alto ed era costituito da un disco di carta, su cui erano fissate al centro delle foglie di carta che potevano essere ruotate. Con esso si poteva simulare la crescita delle foglie e capire come esse si debbano disporre intorno allo stelo per ricevere la massima quantità di luce.

Per i bambini delle elementari era stata ideata una parte ludica, nella quale essi dovevano individuare e colorare le spirali su delle pigne, che poi potevano tenere, per ricordo della visita. I più grandi, invece, potevano disegnare con il software Cabri Géometrè il rettangolo aureo e la spirale a esso associata, costruita con quarti di cerchio, i cui raggi formano una successione di Fibonacci.

Conclusioni

Alla fine dell'anno scolastico, i ragazzi hanno compilato il questionario rivolto a tutti i partecipanti e hanno svolto una verifica scritta, non preannunciata, sui contenuti da loro esposti, dimostrando, in generale, di ricordare i temi trattati e di essere soddisfatti dell'esperienza.

NOTE

* Liceo Scientifico Statale con lingua d'insegnamento slovena "F. Prešeren",
Strada di Guardiella 13/1,
I-34128 Trieste
e-mail: licejpreseren@adriacom.it

BIBLIOGRAFIA

BURGER E.B., STARBIRD M., 2000, *The heart of mathematics: an invitation to effective thinking*, Key College publishing (in cooperation with Springer), Emeryville, California.

LIVIO M., 2003, *La sezione aurea: storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*, Rizzoli, Milano.

PAVLIČ G., 1998, *Slikovni poimovnik, Matematika*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana.

VOROBYOV N.N., 1965, *I numeri di Fibonacci*, Progresso tecnico editoriale, Milano.

SITI WEB

wikipedia.net

sectioaurea.com

goldennumber.net

A tutto cerchio!

Paola Gallopin *

Premessa

Insegno in una delle due sezioni sperimentali PNI[1] del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste da diversi anni e ho già partecipato per due volte a "La matematica dei ragazzi": non mi dilungherò pertanto sul perché ritenga questa un'ottima occasione per i miei studenti per apprendere la matematica, e non solo, e rimando per queste considerazioni a Gallopin (2004a, 2004b).

La classe con cui ho lavorato per l'edizione del 2006 è una classe seconda, composta da 3 ragazze e 19 ragazzi, di cui uno portatore di handicap: per questo motivo ha collaborato per tutta la durata del progetto l'educatrice Maurizia Moro che, assieme alle insegnanti di sostegno, segue il percorso scolastico di tale studente. Per problemi di tempo, la preparazione del laboratorio è avvenuta totalmente in orario extracurricolare e, sebbene ciò sia molto faticoso per gli studenti, è l'unica possibilità che ho.

Vorrei invece soffermarmi sulla scelta dei contenuti. Durante il secondo anno di studi affronto con la classe sia i numeri irrazionali, e dunque i numeri reali, in ambito algebrico, sia lo studio della circonferenza e del cerchio, in ambito geometrico. Risulta abbastanza semplice per gli studenti capire che $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. non sono numeri razionali (la dimostrazione aritmetica, per assurdo, che $\sqrt{2}$ non è razionale non presenta alcuna difficoltà per gli studenti), e quindi la necessità di ampliare il campo razionale $\mathbb{Q}$ risulta abbastanza naturale. Anche se intuitivamente gli studenti non stentano a convincersi che π non sia un numero razionale, la costruzione dei numeri reali non è, però, per niente ovvia. I libri di testo per il biennio del liceo scientifico, sebbene propongano una costruzione del numero reale attraverso coppie di classi contigue, sono spesso poco precisi, e l'approccio risulta di difficile comprensione per la quasi totalità degli studenti. Lo studio della circonferenza e del cerchio e dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a esso è materia che si studia nel curriculum: approfondire in maniera puntuale tali tematiche mi sembrava un significativo completamento di quanto solitamente si tratta e un modo altrettanto significativo per introdurre i numeri reali lavorando su classi contigue di razionali, con l'ausilio della geometria.

Obiettivi

Descriverò di seguito gli obiettivi che mi sono proposta, soffermandomi soprattutto su quelli trasversali, che ritengo più caratterizzanti e motivanti il progetto.

Obiettivi di tipo trasversale

– Lavoro di gruppo: durante l'anno scolastico è piuttosto difficile prevedere dei momenti di lavoro collettivo e, se ciò succede, accade solamente durante le lezioni di Informatica, soprattutto perché i computer a disposizione sono in numero inferiore rispetto al numero di studenti. Comunque, in quel caso, gli studenti devono collaborare al fine di produrre un listato in un linguaggio di programmazione, sulla base di quanto spiegato e richiesto dall'insegnante. In questo progetto, invece, i gruppi erano formati da un maggior numero di allievi e, soprattutto, dovevano essere gli studenti stessi a elaborare i contenuti e poi a organizzarli.

– Sviluppare capacità organizzative: proprio perché il percorso degli studenti è stato quasi del tutto autonomo, essi dovevano organizzare non solo i contenuti, ma anche tempi, materiali e percorsi, cercando di sfruttare al meglio le capacità e abilità dei vari componenti il gruppo di lavoro. Nel percorso curricolare ciò non avviene, in quanto il compito organizzativo viene assunto dall'insegnante, che decide la scansione dei contenuti e degli apprendimenti.

– Apprendere collaborando: molto spesso gli studenti di liceo sono abituati a uno studio individuale, con i pro e contro che esso comporta, ed eventualmente a uno scambio di contenuti solo in fase di controllo. Apprendere assieme un argomento nuovo, fin dall'inizio, è un'esperienza nuova: in effetti, il *cooperative learning* li costringe a un'analisi dei contenuti più ampia e profonda, con tempi che non sono più personalizzati, ma collettivi.

– Migliorare le proprie capacità espositive: proprietà di linguaggio e chiarezza espositiva sono obiettivi che mi pongo per tutto il biennio e sono anche oggetto di valutazione finale. Sebbene ci siano degli studenti che hanno buone capacità in tal senso, questa esperienza richiede uno sforzo ben più ampio: non si tratta, infatti, di esporre e organizzare contenuti per se stessi o per l'insegnante, ma di trovare una buona strategia per un pubblico di età diverse e soprattutto di competenze diverse.

– Sviluppare capacità di analisi e di sintesi: l'analisi di un testo e la successiva comprensione e organizzazione dei contenuti sono una delle capacità che cerco di sviluppare fin dalla classe prima. Per gli studenti, il libro di testo troppo spesso si riduce a eserciziario e, per la maggior parte di loro, la lettura dello stesso risulta difficile, se non mediata precedentemente dall'insegnante. Lasciare che i ragazzi studino, collaborando, una tematica non precedentemente spiegata dall'insegnante li costringe a un nuovo approccio alla matematica e soprattutto ai testi di matematica[2]: se ciò avviene in un contesto collaborativo e non in modo individuale, gli studenti lo avvertono come una sfida *da adulti* e non come una necessità contingente rispetto al programma curricolare.

– Accettazione dell'altro: durante il biennio, spesso, nascono nuove amicizie e molte si perdono timidamente. Alcuni studenti, poi, non riescono a socializzare e vivono in un gruppetto molto ristretto, con compagni che hanno i loro stessi problemi: più frequentemente ciò succede agli studenti maschi ancora un po' immaturi, che vengono esclusi dalle compagne, che li considerano troppo infantili, e dai compagni, che ormai si sono fatti *grandi*. Far interagire e collaborare tutti impone a ciascuno studente di accettare l'altro: accade spesso, poi, che nell'altro si trovino qualità insospettate e piacevoli. Quest'esperienza pertanto era un'occasione nuova di riscoperta per il gruppo classe.

Per quel che riguarda i contenuti, gli obiettivi erano i seguenti:

– Comprendere il concetto di rettificazione di una curva e, in particolare, della circonferenza.
– Calcolare in modo approssimato la lunghezza della circonferenza, utilizzando poligoni regolari inscritti e circoscritti.
– Utilizzare un foglio Excel per il calcolo dell'approssimazione numerica di $2\pi r$.
– Calcolare in modo approssimato l'area del cerchio, utilizzando poligoni regolari inscritti e circoscritti.
– Utilizzare un foglio di Excel per il calcolo dell'approssimazione numerica di πr^2.
– Calcolare in modo approssimato p sia come rapporto fra circonferenza e diametro, sia come rapporto fra area e quadrato del raggio.
– Dimostrazione di Archimede dell'equivalenza fra il cerchio e il triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza dello stesso cerchio.

– Comprendere che π non è un numero razionale.

Per lo studente portatore di handicap, gli obiettivi erano ovviamente personalizzati, decisi, per quel che concerne quelli trasversali, con la collaborazione dell'educatrice e, per quel che riguarda i contenuti, con l'insegnante di sostegno dell'ambito scientifico, Luisa Giugovaz.

Per quel che concerne gli obiettivi trasversali:

– SOCIALIZZARE: seppur inserito in maniera ottimale nella classe, lo studente non aveva mai aderito a iniziative collettive che non fossero mediate fortemente dall'educatrice. La preparazione del laboratorio, invece, prevedeva che lo studente si relazionasse in prima persona con i compagni e che il suo agire fosse mediato dai compagni stessi.

– LAVORARE IN GRUPPO: lo studente, per tutto il biennio, aveva lavorato in maniera individuale, seguendo percorsi personalizzati all'interno o fuori dalla classe. La preparazione del laboratorio prevedeva, invece, la sua partecipazione attiva ai gruppi di lavoro: egli infatti era incaricato di colorare i cartelloni preparati dagli studenti, lavorando con loro.

– ASSUMERE ATTEGGIAMENTI APPROPRIATI IN CONTESTI DIVERSI DA QUELLI USUALI: questo obiettivo rientrava ampiamente nel PEI personalizzato dello studente. Poiché lo studente reagisce spesso in maniera poco controllabile a contesti nuovi e diversi dai soliti, in questa esperienza gli era richiesto di lavorare in gruppo in un ambiente molto caotico, cosa che generalmente lo agita molto, ma anche di partecipare alla manifestazione in una scuola diversa dalla sua, visitando i laboratori assieme all'educatrice.

Per quel che riguarda i contenuti:

– Distinguere la circonferenza dal cerchio.
– Rettificare empiricamente la circonferenza e determinare un valore approssimato della lunghezza della circonferenza attraverso la misura della lunghezza del segmento ottenuto dalla rettificazione.

CONTENUTI

Sebbene la scelta della tematica da studiare e organizzare nel laboratorio sia stata totalmente mia, per la particolarizzazione dei contenuti e per suggerimenti sulle possibilità divulgative degli stessi mi sono state di aiuto le discussioni avvenute nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica, proprio perché le competenze e le conoscenze dei partecipanti agli incontri del Nucleo sono molto diversificate e ciò costituisce senz'altro una ricchezza da non sottovalutare.

Il laboratorio "A tutto cerchio" è stato organizzato dagli studenti in tre postazioni: sebbene il percorso prevedesse che venissero visitate tutte e tre nell'ordine naturale, esse sono state concepite in maniera abbastanza indipendente, nel senso che il visitatore veniva messo nelle condizioni di capire i contenuti di ciascuna, in quanto gli studenti relatori fornivano i prerequisiti necessari alla comprensione, qualora il percorso non fosse stato seguito nella sua interezza.

Prima postazione

Nella prima postazione, con l'ausilio di un cartellone esplicativo, veniva innanzitutto spiegato cosa si intende per *rettificazione della circonferenza*, ovvero la determinazione di un segmento di lunghezza pari a essa.

In un secondo momento si spiegava perché la lunghezza della circonferenza è approssimata, rispettivamente per difetto e per eccesso, dal perimetro di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti ad essa[3]. Si spiegava inoltre che, all'aumentare del numero n di lati di tali poligoni, l'approssimazione diventa migliore e che la differenza fra il perimetro del poligono regolare di n lati circoscritto e il perimetro del poligono regolare di n lati inscritto si può rendere piccola a piacere[4], ottenendo così un *valore approssimato della lunghezza della circonferenza*[5].

Tale valore era stato calcolato utilizzando un foglio di Excel. Assumendo, per semplicità, il raggio della circonferenza unitario e sfruttando le formule che legano il perimetro di un poligono inscritto/circoscritto di $2n$ lati con il perimetro del poligono inscritto/circoscritto di n lati[6], ovvero

$$p_{2n} = \sqrt{p_{2n} \cdot P_{2n}}$$

$$p_{2n} = \frac{2P_n\, p_n}{P_n + p_n}$$

dove:

- p_n è il perimetro del poligono regolare inscritto di n lati
- p_{2n} è il perimetro del poligono regolare inscritto di $2n$ lati
- P_n è il perimetro del poligono regolare circoscritto di n lati
- P_{2n} è il perimetro del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati

erano state prodotte due tabelle, l'una a partire da un poligono regolare di 4 lati e l'altra a partire da un poligono regolare di 6 lati, nelle quali si era ottenuta un'approssimazione numerica della lunghezza della circonferenza, procedendo per approssimazioni inferiori e superiori. In entrambe le tabelle, vi era una colonna che mostrava come la differenza fra il perimetro del poligono di n lati circoscritto e il perimetro del poligono di n lati inscritto tenda a zero, al raddoppiare del numero dei lati. Durante la fase di laboratorio, gli studenti visitatori dovevano, per prima cosa, valutare empiricamente un'approssimazione della lunghezza della circonferenza. Veniva loro richiesto di rettificare empiricamente la circonferenza di un contenitore cilindrico con l'uso di un nastro e poi di misurare la lunghezza dello stesso in modo da avere una prima approssimazione della lunghezza della circonferenza.

Successivamente, gli studenti illustravano il procedimento di approssimazione descritto nei tabelloni, a diversi livelli di approfondimento a seconda dell'età dei visitatori.

Seconda postazione

Nella seconda postazione si spiegava come un metodo anologo a quello usato per la circonferenza possa essere usato anche per approssimare l'area del cerchio[7].

Utilizzando un foglio di Excel, assumendo il raggio unitario e sfruttando le formule che legano l'area del poligono inscritto/circoscritto di $2n$ lati con l'area del poligono inscritto/circoscritto di n lati[8], ovvero

$$a_{2n} = \sqrt{a_n \cdot A_n}$$

$$A_{2n} = \frac{2 \cdot A_n \cdot a_{2n}}{A_n + a_{2n}}$$

dove:

- a_n è l'area del poligono regolare inscritto di n lati
- a_{2n} è l'area del poligono regolare inscritto di $2n$ lati
- A_n è l'area del poligono regolare circoscritto di n lati
- A_{2n} è l'area del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati

erano state prodotte due tabelle, l'una a partire da un poligono regolare di 4 lati e l'altra a partire da un poligono regolare di 6 lati, nelle quali si otteneva un'approssimazione numerica dell'area del cerchio, procedendo per approssimazioni inferiori e superiori. In entrambe le tabelle, una colonna mostrava come la differenza fra l'area del poligono di n lati circoscritto e l'area del poligono di n lati inscritto tenda a zero, al raddoppiare del numero dei lati.

Un ultimo cartellone spiegava come determinare π in due modi diversi: *come rapporto fra la circonferenza e il doppio del raggio oppure come rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del raggio*[9]:

$$\pi = \frac{C'}{2r} = \frac{C''}{r^2}$$

dove C' indica la lunghezza della circonferenza e C" l'area del cerchio di raggio r.

Durante lo svolgimento della manifestazione, gli studenti visitatori dovevano valutare una migliore approssimazione della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio rispetto alla prima postazione, utilizzando poligoni regolari: i ragazzi delle elementari e delle medie inferiori usavano un modello di cartoncino con un esagono inscritto e circoscritto (Fig. 1), mentre i ragazzi delle scuole superiori usavano ottagoni. Una scheda guidata, preparata dai ragazzi, conduceva l'ospite passo a passo.

Infine, un'altra scheda guidata permetteva di trovare un valore approssimato di π partendo dalla lunghezza della circonferenza o dall'area del cerchio.

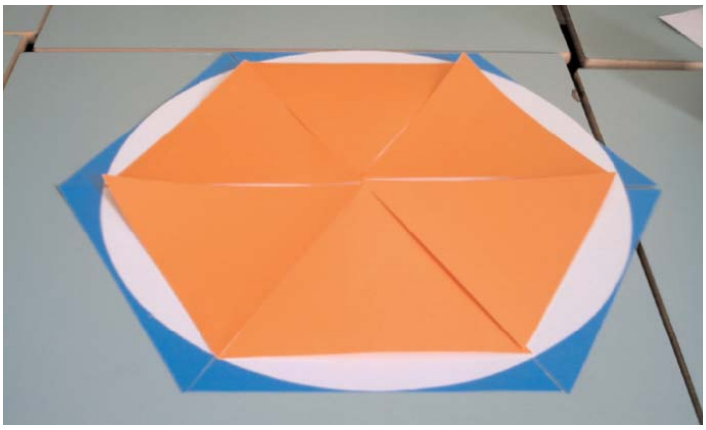


Figura 1

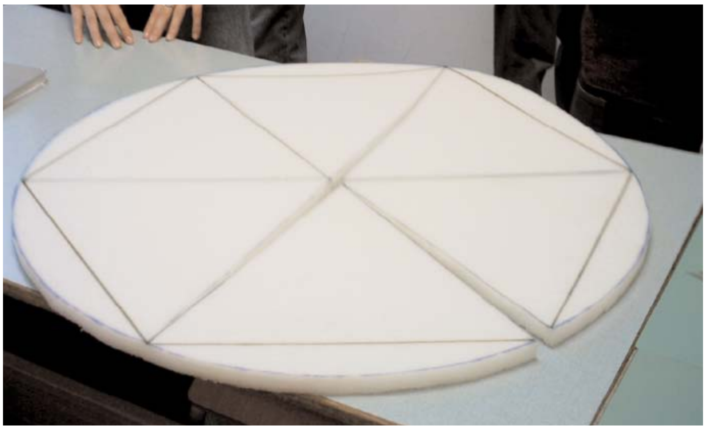


Figura 2

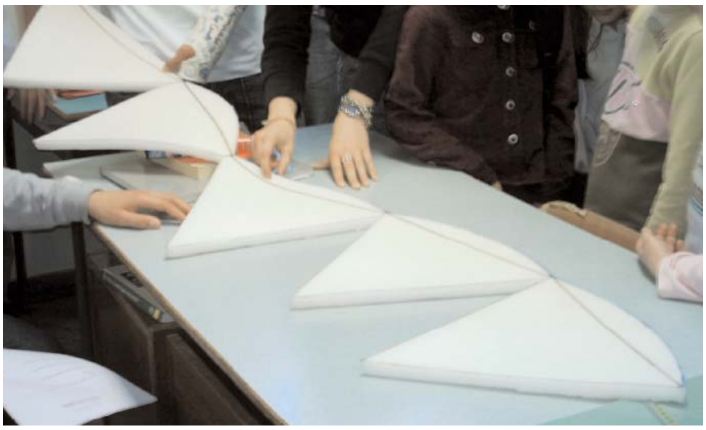


Figura 3

Terza postazione

Nella terza e ultima postazione, dopo una breve panoramica sulla vita e le opere di Archimede, si spiegava al visitatore l'equivalenza fra il cerchio e un opportuno triangolo, dimostrata da Archimede stesso. Si proponeva, però, una spiegazione intuitiva, diversa dalla dimostrazione di Archimede.

Nuovamente, si ragionava con poligoni regolari, questa volta scomposti in triangoli aventi la stessa base (un lato del poligono) e la stessa altezza. Si spiegava che l'area dei poligoni, somma delle aree dei triangoli in cui erano scomposti, approssima l'area del cerchio con un errore che si riduce all'aumentare dei lati. Si mostrava che tali triangoli sono equivalenti a un triangolo che ha per base la somma delle loro basi e che ha la stessa altezza.

Da ciò si poteva intuire che *l'area di un cerchio è equivalente a quella di un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio del cerchio*[10].

Per l'esemplificazione concettuale si utilizzava un modello di gommapiuma, come nelle Fig. 2 e Fig. 3.

Conclusione

Le considerazioni che seguono tengono conto delle:

- osservazioni dirette fatte dall'insegnante durante la fase di preparazione del laboratorio, durante e dopo la manifestazione;
- risposte al questionario[11] proposto dopo la manifestazione a tutti gli studenti partecipanti all'edizione 2006 di "La matematica dei ragazzi";
- considerazioni libere e spontanee sul progetto richieste dall'insegnante agli allievi dopo la manifestazione.

Per quanto riguarda la fase di preparazione del laboratorio, iniziata a ottobre e conclusasi a fine marzo, va detto che gli studenti sono stati piuttosto dispersivi e mal organizzati: ciò probabilmente è dovuto al fatto che essi non sono abituati a lavorare in questo modo e, sebbene fosse stato spiegato loro quello che avrebbero dovuto fare e come si sarebbe svolta la manifestazione, non erano in grado di lavorare autonomamente in maniera efficace. Essi stessi hanno poi osservato che "*il tempo necessario all'organizzazione e realizzazione del progetto si è prolungato parecchio in quanto a volte si era svogliati e lo si impiegava malamente*". Solo quando si è trattato di realizzare i cartelloni, i materiali per le attività di laboratorio e stabilire i percorsi, qualche studente, con migliori capacità organizzative, ha preso in mano la situazione e il gruppo ha iniziato a lavorare in maniera efficace. Lo studente portatore di handicap ha contribuito colorando i cartelloni che gli altri studenti preparavano.

Durante la manifestazione, invece, tutti hanno contribuito in maniera attiva e, in particolare, uno studente, i cui risultati in matematica sono pessimi, si è dimostrato piuttosto abile nel coinvolgere i visitatori delle scuole elementari. Sono anche emerse abilità dei singoli, che nel contesto classe non erano state messe in luce: osserva uno studente che "*le giornate di manifestazione hanno messo in risalto le doti e la scioltezza nel parlare di alcune persone, me compreso, altrimenti nascoste a scuola*", e ciò sicuramente ha gratificato in qualche modo queste persone.

Al rientro a scuola, dopo le giornate della manifestazione, abbiamo discusso apertamente dell'esperienza: ritornare, però, nell'ambiente della classe ha purtroppo riproposto gli schemi usuali di partecipazione al dialogo. Chi si è espresso liberamente ha ritenuto l'esperienza utile, interessante, da ripetere, ma molto faticosa perché lo studio e la rielaborazione dei contenuti, senza una spiegazione a priori dell'insegnante, sono molto difficili. La quasi totalità degli studenti che non ha risultati soddisfacenti in matematica ritiene, però, che studiare in questo modo sia molto più divertente e "facile" perché "*se non si capisce qualcosa si può chiedere a qualche compagno più bravo che ti spieghi …*", e ciò conferma un certo individualismo che caratterizza, secondo il Consiglio di classe, una buona parte della classe.

Tutti sono stati concordi nel ritenere che studiare un argomento con l'obiettivo di spiegarlo poi a qualcuno che non lo conosce è notevolmente più faticoso che "*studiarlo per sé o per la prof.*". Ciò conferma il fatto che in studenti così giovani è piuttosto raro che qualcuno intenda lo studio come un arricchimento personale. A parte rarissimi casi, si studia per affrontare una verifica o un'interrogazione e quel *per sé* sottintende che si studia per poi affrontare il momento di verifica scritta o orale in modo che il voto finale sia soddisfacente *per sé*.

È anche molto difficile spiegare agli altri, specie se l'uditorio non è interessato e motivato: tutti hanno tratto maggior soddisfazione nell'interagire con i bambini delle scuole elementari. Addirittura uno studente, a posteriori, afferma in maniera assolutamente categorica che "*coloro che vengono ad ascoltare non devono venire se non sono interessati all'argomento*". In ogni caso, ripetere le stesse cose più volte durante la mattinata cercando di mantenere vivo l'interesse richiede un grosso sforzo al quale gli studenti hanno ammesso di non essere abituati.

L'esperienza, inoltre, consente agli studenti un primo momento di autoverifica, sia durante la fase conclusiva di preparazione del laboratorio, sia, in modo più sentito, durante la manifestazione stessa. L'analisi a posteriori di un buon gruppetto di studenti relativamente alle giornate della manifestazione è stata indirizzata soprattutto all'efficacia o meno della loro spiegazione alla luce del *feedback* ricevuto dagli studenti visitatori. Non sono stati pochi coloro che si sono accorti di non essere sempre riusciti a esprimersi in modo chiaro e fluido e per quasi la metà di essi ciò è stato dovuto a una comprensione non sempre così puntuale degli argomenti trattati: "*Fino a quando dovevo spiegare ai compagni, l'argomento che mi competeva mi sembrava chiaro, ma quando mi sono trovato a spiegare ai bambini delle elementari mi sembrava di non avere più le idee così chiare …*".

Una prima verifica dei contenuti è stata fatta a breve termine dopo la manifestazione, in ambito curricolare, e gli esiti non sono stati molto difformi rispetto alle dinamiche proprie della classe. Va notato, però, che gli studenti con più difficoltà in matematica sono riusciti a meglio organizzare le loro conoscenze e inquadrare le problematiche relative alla circonferenza e all'area del cerchio proposte loro in sede di verifica; la poca padronanza degli strumenti matematici del biennio non ha permesso loro di concludere, ma ritengo che ciò sia un problema che "La matematica dei ragazzi" non ha assolutamente lo scopo di risolvere.

Posso affermare che il gruppo classe è ora divenuto più collaborativo e spesso ricorre alle abilità del singolo anche per obiettivi non strettamente legati alle attività curricolari. Anche la comunicazione è migliorata: alcuni colleghi mi hanno riferito di uno sforzo sensibile da parte dei più per esporre i contenuti in maniera chiara e significativa, sforzo che anch'io ho notato sia nelle prove orali che in quelle scritte.

Ritengo infine che l'esperienza sia stata molto positiva perché ha modificato in meglio l'approccio ai contenuti di carattere matematico e non solo, e anche perché ha creato in classe un clima meno orientato al singolo e più alla collettività.

NOTE

* Liceo Scientifico Statale
"G. Galilei", via Mameli, 4,
I-34100 Trieste
e-mail: pao.ga@libero.it

1 Piano Nazionale Informatica.

2 I testi che sono stati sottoposti allo studio degli studenti sono stati di diverso tipo: libri di testo procurati dall'insegnante, testi di matematica reperiti presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Trieste e suggeriti nell'ambito delle riunioni del Nucleo di Ricerca Didattica, e testi trovati utilizzando Internet.

3 Durante la preparazione del laboratorio si è dimostrato che la circonferenza rettificata è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare inscritto e minore del perimetro di ciascun poligono regolare inscritto, applicando il seguente postulato di Archimede: *il segmento che rettifica un arco AB di circonferenza (minore di una semicirconferenza) è maggiore della corda AB che lo sottende e minore della somma dei due segmenti di tangenza condotti per gli estremi A e B dell'arco*.

4 Infatti, prefissato arbitrariamente un segmento, è possibile determinare due poligoni regolari, l'uno circoscritto e l'altro inscritto a una circonferenza, tali che la differenza dei loro perimetri sia minore del segmento dato.

5 Le classi costituite dai perimetri dei poligoni regolari considerati sono classi contigue e la circonferenza rettificata è il loro (unico) elemento di separazione.

6 Queste formule sono state ottenute durante la fase di laboratorio, con l'aiuto dell'insegnante, perché nei mesi di preparazione del laboratorio non si era studiato ancora il Teorema della bisettrice, necessario a tale scopo. La dimostrazione comunque non è stata proposta agli studenti visitatori.

7 Si era dimostrato che ogni poligono regolare inscritto in un cerchio è contenuto nel cerchio, mentre ogni cerchio è contenuto in ciascun poligono regolare circoscritto a esso; poi, che fissato a piacere un poligono di data area, è sempre possibile trovare due poligoni regolari, l'uno circoscritto e l'altro inscritto al cerchio, tali che la differenza delle loro aree sia minore dell'area del poligono prefissato.
Le classi delle aree dei poligoni regolari considerate sono classi contigue e l'area del cerchio è il loro (unico) elemento di separazione.

8 Le formule sono state ottenute durante la fase di laboratorio.
La dimostrazione non è stata proposta agli studenti visitatori.

9 Durante la fase di preparazione del laboratorio si era dimostrato sia che due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi, sia che due cerchi stanno fra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi raggi.

10 La dimostrazione è stata studiata nella fase di preparazione, ma non è stata proposta in maniera rigorosa durante il laboratorio.

11 Sui risultati dei questionari si rimanda al lavoro di Zuccheri e Zudini riportato nella III parte di questo volume.

Bibliografia

Boyer C.B., 1968, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano.

Burton D.M., 1985, *The History of Mathematics: an Introduction*, Wm.C. Brown, Dubuque.

Cateni L., Fortini R., Bernardi C., 2002, *Il nuovo pensiero geometrico*, Le Monnier, Firenze.

Delahaye J.P., 1997, *L'affascinante numero p*, Ghisetti & Corvi, Milano.

FraJese A. (a cura di), 1974, *Opere di Archimede*, UTET, Torino.

Gallopin P., 2004a, "Matematica tra i fiumi", in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 165-182.

Gallopin P., 2004b, "Un progetto matematico realizzato in un ambiente non formale: l'apprendimento come evento sociale", in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 207-221.

Kline M., 1972, *Storia del pensiero matematico*, vol. I, Einaudi, Torino.

Zero e dintorni

Elisabetta Matassi* ed Emma Curci**

Introduzione

"Zero e dintorni", un percorso multidisciplinare attraverso la matematica, la fisica e la filosofia, è il laboratorio con cui la classe III A del Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana ha partecipato alla VI edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei". Il progetto segue, a distanza di due anni, la realizzazione del laboratorio didattico "Verso l'infinito... e oltre" (presentato alla V edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi") e ne vuole essere una naturale prosecuzione nell'ottica di un progetto pluriennale più ampio finalizzato all'educazione matematico-filosofico-scientifica. Il progetto didattico è stato inserito nel Piano dell'Offerta Formativa dell'Istituto per l'anno scolastico 2005/2006 e si è svolto parte in orario curricolare parte in orario extracurricolare, in quanto le tre ore settimanali di matematica previste nel piano di studi dei licei non sperimentali hanno reso non sempre agevole conciliare le esigenze di sviluppo del progetto con la necessità di prosecuzione delle attività didattiche "tradizionali".

Il progetto, come già accennato, costituisce un percorso articolato su più ambiti disciplinari e finalizzato all'acquisizione di una serie di contenuti e competenze volte ad agevolare lo studente nella scoperta dello zero e dei suoi segreti attraverso percorsi differenziati, a livello disciplinare e metodologico, ma convergenti a livello di finalità e obiettivi. Il punto di vista viene dato da due sistemi di pensiero, quello matematico e quello filosofico, che da sempre hanno cercato di dare una sistemazione rigorosa a un concetto affascinante, ma, nel contempo, angosciante. Lo zero è un numero come tutti gli altri? È stato scoperto o inventato? La sua introduzione risponde a una naturale necessità o può apparire come una "forzatura"? E ancora, che ruolo occupa nella storia del pensiero e come può essere rappresentato?

Da subito il viaggio alla scoperta dello zero è apparso estremamente interessante e si è offerto a molteplici spunti di riflessione anche legati alla quotidianità degli studenti. È stato osservato che dopo più di mille anni l'uso dello zero incontra ancora sottili resistenze e nel linguaggio comune (che spesso è specchio delle sensibilità di un'epoca) vi è una diffusa riluttanza a usare la stessa parola "zero". Alcuni esempi: documenti e scontrini fiscali del 2000 spesso riportano la data in modo abbreviato (23/6/00, così come l'anno precedente avrebbero riportato 23/6/99), ma, a livello di linguaggio parlato, mentre nel 1999 era comune dire "ventitré giugno del novantanove", nel 2000 raramente si è sentito dire "ventitré giugno dello zero", ma solo "ventitré giugno del duemila". Ancora: nella denominazione dei decenni si usa solitamente la locuzione "anni novanta" per gli anni 1990-99, ma come chiamare gli anni 2000-2009? Ovvero, come si chiamavano gli anni 1900-1909? Sarebbe logico chiamarli "anni zero", ma non si è mai sentita una tale espressione. Infine, di un bambino che ha compiuto un anno si dice che ha un anno di età, ma di uno che non lo ha ancora compiuto non si dice che abbia zero anni, semmai che ha uno, due, tre mesi e, se ha meno di un mese, si dice che ha uno, due, tre giorni... Insomma, lo zero viene scrupolosamente evitato.

I motivi di tale riluttanza? Probabilmente è una eredità del latino che non aveva nemmeno il vocabolo "zero". Essendo poi lo zero associato al concetto di nulla o di vuoto, parlare di anno zero può apparire strano, quasi si trattasse di anni fantasma, e i fantasmi, spesso, fanno paura.

Nel corso della riflessione è emerso inoltre che, anche in ambito scolastico, molte difficoltà di comprensione e la maggior parte degli errori di tipo algebrico (e non solo) vedono coinvolto lo zero. Diversi allievi hanno dichiarato di aver trascorso l'intera Scuola Primaria e buona parte di quella Secondaria chiedendosi perché "0:3 è uguale a zero, ma 3:0 non si può fare" e concludendo, come purtroppo spesso accade, che, se così è stato detto dall'insegnante, così deve essere ed è meglio adeguarsi. E ancora, a livello di Scuola Secondaria Superiore, quanti hanno ancora dei dubbi sull'insieme di soluzioni dell'equazione $0x = 0$ o quanti continuano, dopo anni, a concludere che la disequazione $x \geq 0$ è risolta per ogni valore della variabile?

Estendendo la riflessione anche all'ambito fisico, gli studenti sono stati aiutati a osservare che, mentre tra i numeri naturali lo zero ha proprio il significato di *nulla*, *nessuno* (dire zero mele è come dire nessuna mela), tra i reali lo zero è solo un punto di riferimento, spesso arbitrario. Ad esempio, nella scala delle temperature esiste la temperatura zero, che non vuol dire affatto alcuna temperatura, così come in geografia l'altitudine di 0 m è quella del livello del mare, mentre la longitudine 0 corrisponde a quella dell'Osservatorio di Greenwich...

Dopo tanta riflessione, lo zero è apparso come un oggetto ancora sconosciuto o, comunque, come un qualcosa verso cui è lecito nutrire una certa diffidenza. Nella convinzione che spesso suscita paura e riluttanza ciò che non si conosce, si è deciso di intraprendere un viaggio alla scoperta dello zero, partendo dalla sua affascinante dimensione storica fino ad arrivare all'analisi del ruolo dello zero nel nostro sistema di numerazione e all'estensione del concetto di zero come elemento neutro alle operazioni non numeriche.

Dal punto di vista filosofico, gli allievi sono stati chiamati a interrogarsi sulle diverse modalità con cui la filosofia ha affrontato il tema della "descrizione" del *nulla*, dal "non essere" di tipo metafisico al "vuoto esistenziale". Ha scritto Simone Weil: "C'è un nulla da cui si fugge e un nulla verso cui ci si dirige". Tale affermazione ha rappresentato un importante spunto di riflessione e ha stimolato l'analisi sull'interpretazione filosofica del nulla.

Gli obiettivi

Lo sviluppo del progetto si proponeva il raggiungimento delle seguenti finalità didattiche e formative:

Sapere:
- acquisizione da parte dell'allievo di una serie di strumenti matematici che gli permettano di avvicinarsi al concetto di elemento neutro in termini razionali e non solo puramente intuitivi, attraverso la formulazione di ipotesi e congetture guidate;
- conoscenza del concetto di operazione interna e delle proprietà delle operazioni con particolare riferimento alla definizione di elemento neutro e nell'ottica di un avvicinamento al concetto di struttura algebrica;
- conoscenza della definizione operativa di temperatura in relazione alle diverse scale termometriche e del significato di Zero Assoluto in termodinamica e nella teoria cinetica dei gas;
- acquisizione di una terminologia corretta, rigorosa e adeguata ai diversi contesti;
- conoscenza del contesto storico-filosofico in cui le diverse problematiche sono maturate e si sono sviluppate.

Saper fare:
- sviluppo della capacità di utilizzare le conoscenze acquisite nell'individuazione delle proprietà delle operazioni numeriche e non numeriche;
- saper utilizzare i concetti acquisiti in contesti matematici diversificati (secondo livello di astrazione);
- sviluppo della capacità di analizzare, ed eventualmente elaborare, brevi percorsi interdisciplinari relativi ai temi in oggetto e di relazionare in merito, in contesti diversi da quello di classe;

– sviluppo della capacità di creare materiali divulgativi digitali e cartacei in un'ottica di trasmissione delle conoscenze.

Saper essere:
– sviluppo della capacità di lavorare in gruppo (in un contesto scuola dove l'apprendimento si fonda essenzialmente sulla rielaborazione individuale) attraverso una presa di coscienza delle proprie capacità e dei propri limiti in relazione a un obiettivo prefissato;
– maturazione dei processi di socializzazione e interazione fra pari rivolta a una conoscenza critica e consapevole delle proprie attitudini, ma anche delle proprie paure ed insicurezze;
– maturazione della capacità critica rispetto all'efficacia comunicativa e argomentativa nella trasmissione delle conoscenze, anche in relazione all'età degli ascoltatori.

Tempi e fasi del progetto

Il progetto "Zero e dintorni" si è articolato in quattro fasi:

1. Presentazione dei contenuti: la fase di presentazione dei contenuti è stata preceduta da un'attività di carattere motivazionale, in cui gli studenti sono stati sollecitati a porsi degli interrogativi di carattere matematico, fisico e filosofico e sono stati incoraggiati a formulare delle congetture o delle ipotesi basate su conoscenze pregresse, ragionamenti euristici o anche solo personali intuizioni.

Lo zero è stato inventato o scoperto? Chi sono gli artefici di questa straordinaria innovazione? Quale ruolo riveste lo zero nel nostro sistema di numerazione? Esistono, in altri ambiti matematici, oggetti che "si comportano" come lo zero? Conoscete un gruppo musicale che si chiama "ZERO ASSOLUTO"? Vi siete mai chiesti a quale ambito scientifico si riferisce questa espressione e che cosa indica? E ancora: qual è il significato dei termini "nulla", "vuoto", "assenza" nella storia del pensiero?

Queste sono solo alcune delle domande poste agli allievi e poi, con lo sviluppo della discussione, dagli allievi stessi. Di particolare interesse sono le considerazioni emerse. Innanzitutto, gli allievi, provenienti dal biennio della scuola superiore, hanno dimostrato di possedere nozioni estremamente vaghe rispetto all'evoluzione del concetto di numero, tanto in epoca antica quanto in quella moderna, a testimonianza del fatto che, ancora troppo spesso, la dimensione storico-epistemologica del pensiero matematico viene, nella scuola, impoverita o addirittura negata.

Superata però una prima fase di scetticismo o incredulità ("Esiste anche la storia della matematica?" chiede stupita un'allieva), gli studenti hanno dimostrato interesse e curiosità rispetto alle caratteristiche dei sistemi di numerazione e all'uso dello zero nelle civiltà antiche, trovando negli spunti proposti un'occasione per completare la loro formazione storica e culturale e, nel contempo, per arricchire di significato i concetti matematici. I contenuti proposti nell'ambito delle diverse discipline coinvolte nel progetto sono stati i seguenti:

STORIA DELLA MATEMATICA: i sistemi di numerazione egizio e babilonese. Il sistema di numerazione greco. La matematica presso i Maya. La matematica presso gli Indiani. La "scoperta" dello zero e la sua introduzione nel sistema di calcolo occidentale.

MATEMATICA: definizione di legge di composizione interna. Proprietà (associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza del simmetrico). Introduzione al concetto di gruppo. Esempi significativi di individuazione dell'elemento neutro in contesti diversificati: l'insieme vuoto rispetto all'unione insiemistica, la tautologia rispetto alla disgiunzione logica, la funzione identica rispetto alla composizione di applicazioni, la matrice identità rispetto al prodotto di matrici.

FISICA: definizione operativa di temperatura e scale termometriche. La scala Kelvin. Significato fisico di $T = 0$ e sue applicazioni tecnologiche.

FILOSOFIA: il concetto di nulla come "non essere" in Parmenide e Platone. I sofisti. Aristotele e l'infinito in potenza. Il vuoto filosofico.

2. APPROFONDIMENTO DEI CONTENUTI E ORGANIZZAZIONE DEL LABORATORIO: in questa seconda fase gli allievi hanno approfondito le tematiche affrontate nei diversi ambiti disciplinari attraverso testi di uso scolastico e non, materiale reperito in rete e appunti forniti dai docenti. Il lavoro di rielaborazione, propedeutico all'organizzazione del laboratorio, si è svolto a gruppi, in taluni casi venutisi a formare in modo spontaneo, in altri costituiti sulla base delle indicazioni del docente.

Data l'età degli allievi, si è cercato di agevolare le inclinazioni e gli interessi dei singoli, valorizzando in tal modo la maggior predisposizione di alcuni per gli studi umanistici, di altri per quelli scientifici. Non sempre però, all'interno dei diversi gruppi, la ripartizione dei ruoli e dei carichi di lavoro è avvenuta in maniera misurata e consapevole, costringendo spesso il docente a intervenire per riequilibrare le situazioni di difficoltà onde evitare, come spesso accade, che i più motivati si facciano carico della quasi totalità degli oneri, mentre i meno "volenterosi" si defilino dalle proprie responsabilità coperti dal gruppo.

Di particolare interesse, in questa seconda fase, è stata la preparazione dei diversi itinerari, differenziati in base all'età e alle conoscenze dei visitatori. In accordo con gli allievi, si è deciso di proporre un approccio al tema in oggetto anche per gli studenti della scuola media inferiore (oltre, naturalmente, a un itinerario privilegiato per gli allievi degli istituti superiori). Si è trattato di un lavoro estremamente interessante svolto sotto la stretta guida dei docenti, data la difficoltà dimostrata dagli allievi (abituati a relazionarsi solo con i docenti e non con i propri pari) nel differenziare il linguaggio e le modalità espositive in relazione alle caratteristiche dell'uditorio.

Gli itinerari stabiliti sono stati sostanzialmente due, che, per quel che concerne la storia della matematica, la fisica e la filosofia, si differenziavano rispetto alla complessità e al rigore del linguaggio, mentre, per quel che riguarda la matematica, erano considerevolmente diversi anche nei contenuti.

PERCORSO 1 (SCUOLA MEDIA INFERIORE): esempi di operazioni numeriche → definizione di legge di composizione interna → proprietà associativa e commutativa → ruolo dello zero e introduzione al concetto di elemento neutro.

PERCORSO 2 (SCUOLA MEDIA SUPERIORE): definizione di legge di composizione interna → proprietà delle operazioni, con particolare riferimento all'esistenza dell'elemento neutro → esempi di operazioni non numeriche e individuazione dell'elemento neutro → introduzione alla definizione di gruppo.

3. PRODUZIONE DI MATERIALI: ogni gruppo di lavoro ha ideato, organizzato e realizzato materiali di supporto per l'allestimento della propria postazione all'interno del laboratorio, al fine di stimolare l'interesse dei visitatori e di agevolare la presentazione dei contenuti. I supporti predisposti sono stati i seguenti:

- due o tre cartelloni per ognuna delle quattro postazioni di lavoro, caratterizzati da semplici schemi riassuntivi del percorso proposto e da un gran numero di fotografie o disegni, al fine di offrire un naturale completamento degli ambienti e una traccia visiva di facile lettura;

- una presentazione in Power Point costituita da otto diapositive da proporre ai visitatori all'ingresso del laboratorio. Ogni diapositiva si riferiva a una singola postazione e suggeriva un approccio alle tematiche proposte in chiave problematica in modo da suscitare interesse e curiosità nel visitatore;

- un pieghevole in A4 di vari colori offerto a tutte le classi in visita contenente una breve presentazione dell'itinerario proposto, scritta dai ragazzi per i ragazzi e corredata da alcune informazioni relative alla storia della classe e alla scuola di provenienza;

- diverse schede di lavoro per ogni postazione rivolte ai visitatori e finalizzate a una rielaborazione autonoma da parte degli ascoltatori dei concetti esposti;

- un supporto in compensato con linee graduate scorrevoli per il confronto fra le diverse scale termometriche e l'individuazione dello zero assoluto.

4. Svolgimento della manifestazione: in analogia a quanto fatto, nella V edizione della manifestazione, per il laboratorio "Verso l'infinito… e oltre" (cfr. prima parte del presente volume), anche in questo caso si è deciso di articolare il laboratorio su quattro postazioni idealmente coincidenti con le quattro proposte di approccio al tema dello zero.

Rispetto però all'esperienza dell'edizione precedente, che aveva visto nella difficoltà di gestione dei tempi uno dei suoi limiti più evidenti, si è scelto di non accentuare la proposta dal punto di vista della quantità dei contenuti e di privilegiare lo scambio e il dialogo tra relatori e visitatori, offrendo a questi ultimi la possibilità di "mettersi alla prova" attraverso la manipolazione del materiale presentato.

La possibilità di seguire parzialmente o totalmente il percorso tra le postazioni e la flessibilità nella scelta dell'itinerario ha permesso, nel corso della manifestazione, di suddividere le classi in visita in gruppi numericamente ridotti, facilitando lo scambio e la partecipazione attiva.

La partecipazione alla manifestazione è stata preceduta da una fase, dedicata alle "prove generali", in cui gli allievi sono stati chiamati a testare l'efficacia delle scelte argomentative e delle modalità espositive adottate. Purtroppo, a differenza di quanto era successo in sede di preparazione del laboratorio "Verso l'infinito… e oltre", i tempi ristretti non ci hanno consentito di presentare in via preliminare il laboratorio ad allievi esterni al gruppo classe e ciò non ha favorito una reale acquisizione di consapevolezza rispetto alle diverse problematiche della comunicazione.

L'itinerario proposto si è articolato in cinque momenti:

1. Accoglienza: l'ingresso dei visitatori nel laboratorio è stato accompagnato dalle note di un brano musicale degli "Zero Assoluto" (stimolo uditivo) in concomitanza allo scorrere, su un'ampia parete, delle diapositive della presentazione in *Power Point* (stimolo visivo).

La sovrapposizione delle due sollecitazioni ha creato un'atmosfera per certi versi suggestiva, che ha contribuito a favorire un approccio positivo e "curioso" alle esperienze proposte. Sempre a scopo motivazionale, sono state offerte ai visitatori le brochure con la descrizione sintetica dell'itinerario e, attraverso il supporto cartaceo offerto da un colorato cartellone, sono stati presentati alcuni aspetti certamente singolari inerenti la forte diffidenza che ancora circonda l'idea dello zero.

Terminata la fase di accoglienza, i visitatori sono stati invitati a dividersi in piccoli gruppi e sono stati indirizzati verso le diverse postazioni.

2. Lo zero nella storia: dopo un breve excursus storico relativo ai sistemi di numerazione nelle civiltà antiche e al ruolo che in essi occupava (o non occupava) lo zero, i visitatori sono stati invitati a cimentarsi nello scrivere alcuni numeri, utilizzando i sistemi di numerazione dei popoli antichi, e sono stati guidati nella riflessione sulle diverse modalità di rappresentazione dello zero in analogia o in contrasto con il nostro sistema di numerazione.

3. Lo zero in matematica: partendo dal ruolo dello zero nel nostro sistema di numerazione, i visitatori sono stati sollecitati a riconoscerne il particolare "comportamento" rispetto alle diverse operazioni aritmetiche. Tale riflessione ha suggerito la possibilità che, in ambito matematico, ci possano essere altri "oggetti" che si comportano come lo zero (soprannominati dagli allievi di IV A "i cugini dello zero"). Da qui la rivisitazione del concetto di insieme vuoto rispetto all'unione insiemistica, di funzione identica rispetto alla composizione di applicazioni e di tautologia nella logica delle proposizioni come elementi neutri rispetto a una certa legge di composizione interna. Quando è stato possibile, la trattazione si è spinta fino all'introduzione delle proprietà formali con un primo cenno all'idea di struttura algebrica.

Anche in questo caso i visitatori hanno potuto mettersi alla prova attraverso l'utilizzo di materiali creati e proposti dagli allievi.

4. Lo zero nella fisica: dopo una breve introduzione relativa al concetto di temperatura e alla sua definizione operativa attraverso le diverse scale termometriche, i visitatori sono stati introdotti al concetto di zero assoluto in termodinamica, con particolare riferimento alle sue moderne applicazioni tecnologiche. I più piccoli hanno potuto "giocare" con le diverse scale termometriche, utilizzando un supporto in compensato dotato di linea graduata scorrevole, che ha facilitato l'individuazione dello zero e il "passaggio" da una scala all'altra.

5. Lo zero in filosofia: i visitatori si sono trovati di fronte a due grandi cartelloni; il primo riportava un grande punto interrogativo a indicare la specificità della filosofia e il secondo una vignetta con una domanda precisa: "Si può pensare al nulla?". I visitatori sono stati invitati a porsi degli interrogativi e sono stati guidati nella formulazione di ipotesi e congetture. Forse, più che in altre postazioni le reazioni sono state molteplici e a tratti originali. Alla richiesta di tentare una concettualizzazione del "nulla", la maggior parte ha proposto una caratterizzazione per sinonimi senza mai darne una definizione assoluta. Anche di fronte alla richiesta di rappresentare graficamente il vuoto, la gran parte dei visitatori ha lasciato il foglio bianco o ha raffigurato un cerchio indicandone l'interno. Tra le proposte più curiose va segnalata certamente la rappresentazione del vuoto come uno sturalavandini, dove il vuoto era lo spazio compresso dalla ventosa. Tale fase euristica ha preceduto la presentazione di alcune risposte all'interrogativo, offerte dalla filosofia nel corso dei secoli.

Analisi dell'esperienza

L'analisi dell'esperienza si fonda essenzialmente sulle osservazioni dirette del lavoro svolto dagli allievi prima, durante e dopo la manifestazione, su brevi elaborati prodotti dagli allievi al termine del progetto e sui questionari di valutazione loro somministrati in chiusura d'anno scolastico.

1. Aspetti relazionali e difficoltà emerse: per quel che concerne la fase di preparazione che ha preceduto la manifestazione, va rilevato come all'inizio alcuni allievi abbiano accolto la proposta di partecipazione all'iniziativa con una certa preoccupazione. Le motivazioni di un tale atteggiamento sono molteplici. Innanzitutto, gli studenti della classe avevano partecipato, in qualità di visitatori, alla V edizione di "La matematica dei ragazzi"; in tale circostanza avevano avuto modo di visitare il laboratorio preparato dai loro compagni di istituto più grandi e la prospettiva di dover organizzare e gestire un laboratorio autonomamente pareva loro un'impresa "titanica". Emergeva inoltre la preoccupazione di un impegno eccessivo (soprattutto in orario extrascolastico) che, andandosi ad affiancare al già rilevante carico scolastico, avrebbe reso ancora più difficile il mantenimento dei livelli di profitto. La preoccupazione maggiore nasceva, in ogni caso, dalla prospettiva di dover "parlare in pubblico", ipotesi di fronte alla quale alcuni studenti opponevano addirittura un secco rifiuto.

A fronte di tali preoccupazioni si è ritenuto importante tranquillizzare gli studenti in merito alla valutazione (eventuali "insuccessi" non sarebbero certamente stati tradotti in una immediata valutazione sommativa) e, nel contempo, ricordare loro che l'esperienza prospettata poteva essere l'occasione per "mettersi in gioco" in modo diverso rispetto alle quotidiane richieste di performance scolastiche. Va in ogni caso rilevato che tali atteggiamenti di preoccupazione o scetticismo rispetto a proposte di apprendimento in contesti non formali sono spesso figli di una tradizione scolastica che, soprattutto nella scuola superiore, privilegia in modo indiscriminato l'apprendimento tradizionale, appiattito sullo schema duale lezione frontale – interrogazione.

In fase preparatoria, la maggior parte degli studenti ha dimostrato una buona autonomia nell'organizzazione del lavoro e ha gestito l'impegno con rigore e senso di responsabilità. Non sempre però, come già accennato, all'interno dei diversi gruppi di lavoro gli incarichi sono stati ripartiti in modo equilibrato e coerente. In più di un caso gli allievi (spesso le allieve) più motivati e responsabili hanno "preso in mano la situazione", accollandosi buona parte degli oneri al fine di consentire al gruppo il raggiungimento degli obiettivi prefissati.

Le maggiori difficoltà si sono però riscontrate durante la manifestazione e vanno ricercate nella profonda difficoltà dimostrata da alcuni allievi nel relazionare e relazionarsi con un uditorio non usuale. Solo una percentuale minoritaria di studenti è stata in grado di proporre il proprio percorso in modo non rigido, interagendo con i visitatori e adattando le modalità espositive alle caratteristiche e all'età degli stessi.

Dai questionari e dai brevi elaborati prodotti dagli allievi è emerso che la quasi totalità ha ritenuto positiva l'esperienza vissuta, in quanto ha rappresentato un modo diverso per apprendere i concetti matematici e ha migliorato le capacità espositive. Dal punto di vista invece dei rapporti interpersonali, la maggior parte degli allievi ritiene che l'esperienza non sia servita a migliorare o rafforzare i rapporti, ormai piuttosto delineati, tra i compagni, ma piuttosto a consolidare amicizie e collaborazioni già esistenti. In merito alle difficoltà incontrate una percentuale significativa di allievi ha evidenziato la difficoltà nell'adottare strategie comunicative efficaci in sede di manifestazione, nonché l'incapacità di coinvolgere alcuni gruppi di visitatori apparsi piuttosto riluttanti al confronto.

2. Aspetti legati all'apprendimento della matematica: dal punto di vista dell'assimilazione dei contenuti proposti, le prove di valutazione effettuate al termine del progetto hanno chiaramente evidenziato un miglioramento dei livelli di profitto nella quasi totalità degli allievi. La necessità di dover proporre a un pubblico esterno i contenuti appresi ha favorito il raggiungimento di una reale padronanza degli stessi nei termini del "saper fare" e non solo del "sapere". Prima dell'avvio del progetto, su 14 allievi 5 presentavano, in matematica, livelli di preparazione non sufficienti; al termine dell'anno scolastico, 4 di essi hanno migliorato di almeno un punto il proprio livello di profitto e solo uno non è riuscito incrementare i propri standard di prestazione.

3. Effetti a breve e a lungo termine dell'esperienza didattica: a breve termine diverse e rilevanti sono state le ricadute dell'esperienza, non solo rispetto alla classe direttamente coinvolta, ma sull'intero Istituto. Il progetto "Zero e dintorni" è stato riproposto, per le classi IV A e III B dell'Istituto, all'interno del Piano dei Progetti per l'a.sc. 2006/2007 e vedrà la collaborazione di un nuovo docente (Giuseppe Lucilli - Matematica e Fisica). Gli obiettivi prefissati sono i seguenti:

- creazione di un laboratorio permanente di matematica sui temi dello zero e dell'infinito usufruibile da tutte le classi dell'Istituto;

- ampliamento dei contenuti proposti in chiave interdisciplinare, con l'inserimento di nuovi percorsi conoscitivi e di approfondimento (il tema della rappresentazione del vuoto nella storia dell'arte, il problema dell'uso dello zero nei linguaggi di programmazione informatici);

- la creazione di un ipertesto che raccolga gli approfondimenti prodotti dagli allievi;

- l'utilizzo del laboratorio in progetti di orientamento in entrata, per gli allievi delle scuole medie inferiori.

NOTE

*Liceo Scientifico "E.L. Martin"
di Latisana (UD)
e-mail: matassi.elisabetta@libero.it

** Liceo Scientifico "E.L. Martin"
di Latisana (UD)

BIBLIOGRAFIA

BECKERMAN S., 1998, *If zero is not a value, then can we count on nothing?*, State College Pennsylvania.

BELLIPANNI M., 2005, *Insiemi, strutture e calcolo*, FORCOM, Roma.

BERZOLARI L., 1979, *Enciclopedia delle matematiche elementari*, Hoepli, Milano.

BOYER C.B. , 1968, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano.

BURTON D.M. ,1985, *The History of Mathematics: an Introduction,* Wm.C. Brown, Dubuque.

HERSH R., 2001, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi, Milano.

KAPLAN R., 1999, *Zero. Storia di una cifra*, Rizzoli, Milano.

KLINE M., 1972, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino.

SITI WEB

http:// wikipedia.org/wiki/Zero

http:// www.liceofoscarini.it/didattic/astronomia/astro/zero.html

http:// lgxserver.uniba.it/lei/rassegna/021228e.htm

http:// www.fralenuvol.it/albero/sapere/simboli/cerchio.php

Dove vola l'ape Maia?
Viaggio tra i sistemi di riferimento

Letizia Mucelli*

Introduzione

Come evidenziato nella presentazione del laboratorio scritta dai ragazzi e riportata all'inizio della seconda parte di questo volume, gli allievi della classe terza del Liceo Linguistico "Paolino d'Aquileia" si sono proposti di spiegare a bambini di scuola elementare ed a propri coetanei, con la realizzazione di laboratori e giochi didattici, il concetto di sistema di riferimento nel piano e nello spazio, evidenziandone l'importanza e l'applicazione nella quotidianità (dalla necessità di individuare univocamente un punto od un luogo di punti nel piano o nello spazio, a quella di individuare una precisa località su una carta geografica o su una mappa). Il laboratorio è stato pensato e realizzato per visitatori dagli otto anni in poi.

La classe è composta da 21 ragazzi. I maschi sono sei; quattro di essi provengono da altre scuole e sono stati inseriti nel corso del secondo quadrimestre. A tal proposito si sottolinea come l'esperienza di partecipazione a "La matematica dei ragazzi" si sia rivelata utile ai fini di una ottimale integrazione in classe dei nuovi alunni. Di seguito, si riporta una descrizione dei contenuti e delle modalità con cui essi sono stati proposti nel corso della manifestazione "La matematica dei ragazzi". Si "viaggerà" tra sistema di riferimento cartesiano e polare, rettangolare e sferico, passando attraverso un breve excursus storico ed alcuni curiosi, quanto sorprendenti, riscontri nel meraviglioso mondo della natura, evidenziando i legami che sussistono tra i diversi sistemi di riferimento.

Un'alunna si fa portavoce della classe, accogliendo i visitatori, spiegando brevemente le motivazioni che hanno portato a sviluppare l'argomento "i sistemi di riferimento" ed osservando che tale concetto non è da restringere solo all'ambito scientifico, ma si può allargare anche a quello filosofico. Ricorda, ad esempio, lo storico passaggio che ha portato dal sistema di riferimento geocentrico a quello eliocentrico, dalle teorie tolemaiche a quelle copernicane e di Keplero. Non si trascura di osservare come anche per parlare di morale, di etica, del bene e del male, sia sempre necessario fissare dei parametri, dei punti ai quali riferirsi, fino a riconoscere un riferimento assoluto, ad esempio, in Cristo per i Cristiani, in Allah per i Musulmani, in Buddha per i Buddisti[1]. A livello di curiosità, si ricorda l'aneddoto secondo cui al gracile Cartesio ancora bambino, mentre riposava nella sua stanza presso un collegio di Salesiani, sia venuta l'idea di fissare un sistema di riferimento, detto in seguito cartesiano, osservando una mosca che volava e ponendosi il problema di come fare a localizzarla!

L'alunna invita quindi i visitatori ad avvicinarsi ai laboratori, evidenziando anche l'ordine più opportuno da seguire, soprattutto per i più piccoli, per i quali è fondamentale rispettare una propedeuticità, tenendo conto che in alcuni casi è la prima volta che si accostano a concetti quali quelli proposti.

1° Laboratorio – Dove vola l'ape Maia?

In questo primo laboratorio molto apprezzato dai visitatori delle elementari, i bambini visitatori diventano protagonisti di una piccola recita nella quale interpretano ape, sole e fiore per dare un'idea di come animaletti piccoli come le api siano in grado di comunicare con estrema precisione alle proprie compagne, ad esempio, la posizione di una fonte di cibo (fiore), eseguendo delle particolari danze riprodotte schematicamente su un cartellone posto sul pavimento ed orientandosi rispetto al sole. Ai visitatori più grandi si cerca di dare una spiegazione più dettagliata, anche con l'ausilio degli schemi appesi alla parete, in cui sono evidenziati angoli e direzioni rispetto al sole.

2° Laboratorio – Giochi didattici

In questo laboratorio si ritiene opportuno introdurre i bambini al concetto di coordinate cartesiane attraverso un gioco intitolato "caccia all'oggetto". In questo primo approccio, ci si riduce di fatto a lavorare in un solo quadrante: un cartellone è suddiviso in riquadri numerati (vedi Fig. 1), in ciascuno dei quali è inserito un piccolo oggetto e, in alcuni, una caramella! Se viene individuata correttamente la casella indicata tramite assegnazione di coordinate, si vince la caramella. Si osservi che in questo caso le coppie di numeri individuano le caselle e non dei punti. Si rappresentano in verde i numeri scritti orizzontalmente ed in rosso quelli scritti verticalmente: l'obiettivo è quello di differenziare anche visivamente la differenza tra ascisse ed ordinate in un sistema di riferimento cartesiano.

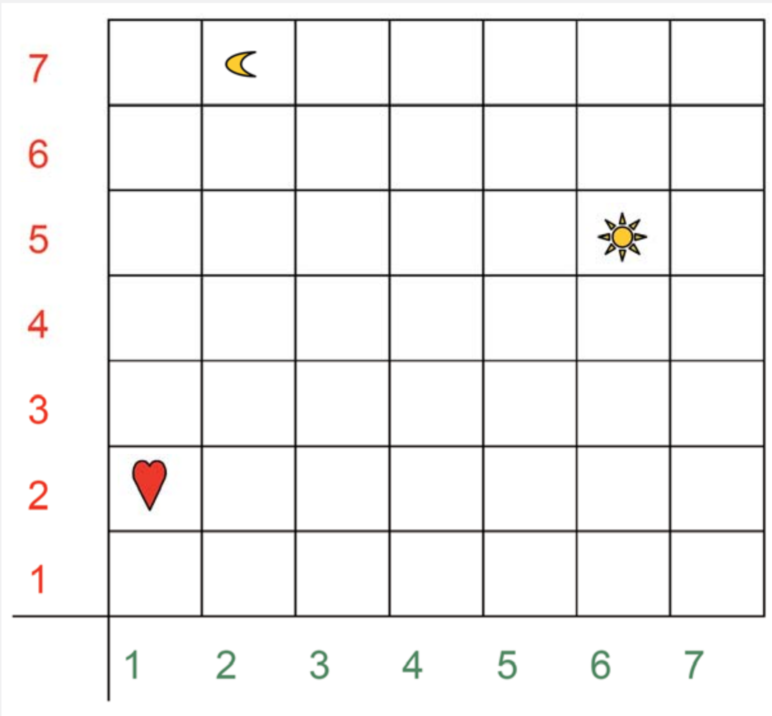


Figura 1

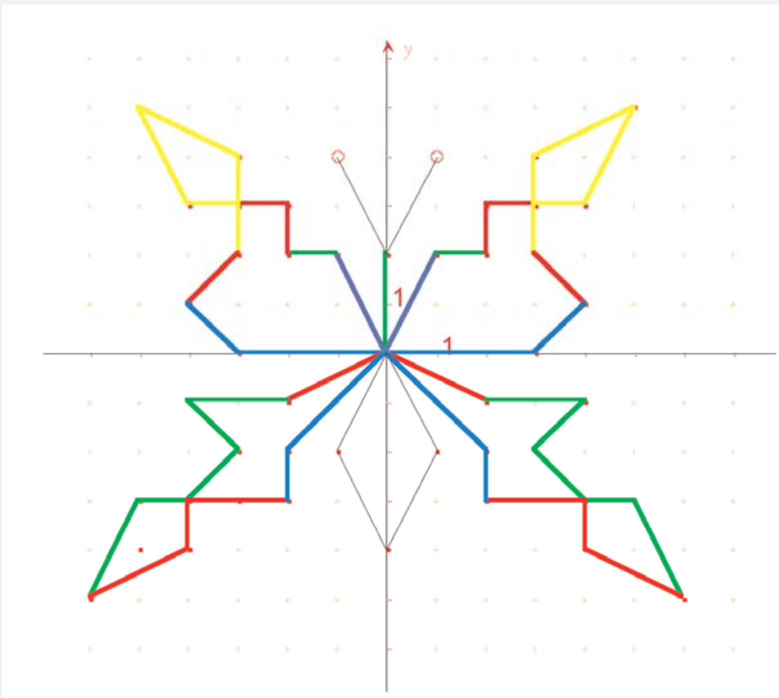


Figura 2

Per illustrare in modo semplice ed immediato il concetto di coppia ordinata, si dice ai bambini che per individuare correttamente le caselle è fondamentale partire sempre con il verde, come con il semaforo! Quindi il segreto per riuscire bene in questo gioco e nei successivi è sempre quello di usare prima il numero verde e poi il rosso, per ciascuna coppia di numeri assegnata. Si passa quindi a mostrare come le abilità imparate con questo primo gioco possano tornare utili nella vita di ogni giorno, per individuare un indirizzo con l'aiuto di "*Tutto città*" (gioco denominato "dove abita il signor Rossi?") o una località sul mappamondo. Altri giochi vengono proposti in questo laboratorio. In uno di questi, i bambini sono invitati a colorare con un determinato colore alcune caselle di uno schema come quello di Fig. 1, indicate assegnando le rispettive coordinate in verde e rosso. Una ulteriore attività propone ai visitatori di inserire dei punti in una griglia con l'asse delle x colorato in verde e l'asse delle y colorato in rosso: si forniscono le coppie ordinate che rappresentano le coordinate di alcuni punti e si chiede ai visitatori di unire i punti trovati per scoprire che immagine si forma (vedi ad es. Fig. 2).

Si osservi che tale attività non è più ristretta solo al primo quadrante del piano cartesiano, ma è estesa a tutti e quattro. Sarebbe quindi necessario introdurre almeno a livello intuitivo i numeri negativi. Vista la tenera età dei visitatori, dopo aver richiamato i classici esempi del termometro ed aver sondato con domande mirate il reale livello di conoscenze dell'interlocutore, per semplificare l'approccio ed ottenere un'immediata acquisizione di abilità nello svolgimento

Esercizi – coordinate e simmetrie

1. Osserva la figura a lato.
2. Individua il punto di coordinate (2,4) e chiamalo A.
3. Individua il simmetrico di A rispetto all'asse y. Chiama B tale punto e scrivi le sue coordinate.
4. Confronta le coordinate di A e B: individua analogie e differenze.
5. Individua il simmetrico di B rispetto alla retta r. Chiama C tale punto e scrivi le sue coordinate.
6. Confronta le coordinate di B e C. Cosa osservi?
7. Individua il simmetrico di B rispetto all'asse x e chiama tale punto D. Scrivi le coordinate di D.
8. Confronta le coordinate di B e D. Cosa osservi?
9. D risulta simmetrico di A rispetto a quale punto?
10. Confronta le coordinate di A e D. Cosa osservi?
11. Quali sono tutti gli assi di simmetria della figura?
12. Qual è il centro di simmetria?

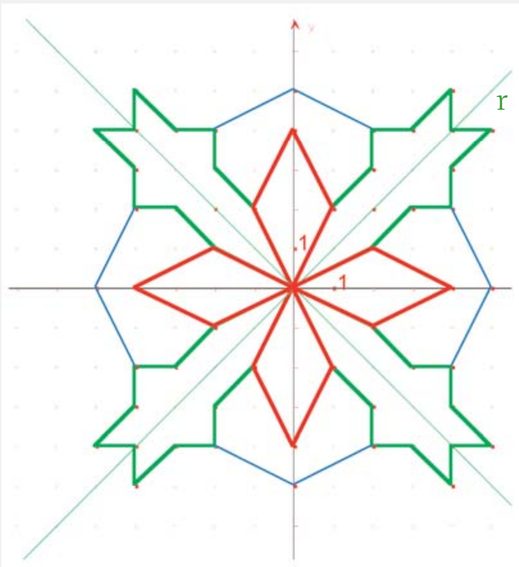


Figura 3

delle attività proposte, si ritiene opportuno semplificare, fornendo le "istruzioni del gioco" come segue: "+ verde significa spostati a destra, – verde significa spostati a sinistra; + rosso significa spostati in alto, – rosso significa spostati in basso". In tal modo, per ottenere lo scopo, gli unici prerequisiti necessari, a parte la conoscenza almeno dei primi numeri naturali, sono la capacità di distinguere i colori, la destra dalla sinistra e l'alto dal basso!

Traendo spunto da lavori di questo tipo, si fanno anche considerazioni relative alle simmetrie, laddove possibile. A tale scopo sono predisposte schede come la Fig. 3.

3° Laboratorio – Battaglia navale nel piano cartesiano

In questo classico gioco, le navi sono rappresentate da insiemi di punti del piano cartesiano disposti in verticale, orizzontale o diagonale. Il campo da gioco (piano cartesiano) è rappresentato su due cartelloni, e in corrispondenza di ciascun punto che forma una nave si colloca un *post-it*, così da poter riutilizzare i medesimi cartelloni quante volte necessario.

Ciascun concorrente tenta di abbattere le navi avversarie indicando ciascun punto attraverso l'assegnazione delle rispettive coordinate. Un arbitro controlla che i concorrenti segnino in modo corretto il punto richiesto. In caso di errore, chi sbaglia perde un turno di gioco.

L'obiettivo didattico principale è quello di chiarire e consolidare il concetto di coppia ordinata, evidenziando che, se si scambiano tra loro i valori delle coordinate di un punto, il punto individuato nel piano non è più il medesimo (a meno che i valori non coincidano). Per focalizzare la questione si è pensato di non trascurare l'aspetto visivo, continuando a disegnare gli assi cartesiani nei colori verde e rosso.

4° Laboratorio – I principali sistemi di riferimento e le relazioni che li legano

Per i visitatori più grandi (almeno coetanei rispetto alla classe che espone), si predispongono dei cartelloni per illustrare anche da un punto vista formale quali siano i legami tra i vari sistemi di riferimento, ed evidenziare come un punto sia univocamente determinato nel piano e nello spazio, rispettivamente, da una coppia e terna ordinata di coordinate.

A tal fine, è necessario definire le funzioni seno e coseno. La definizione proposta è quella classica.

Si evidenzia poi il legame tra coordinate di un punto nel piano in un sistema di riferimento cartesiano e nel sistema polare associato. In modo analogo si estende la questione al caso tridimensionale, ricavando le equazioni che evidenziano il legame tra sistema rettangolare e sferico[2].

Per gli eventuali visitatori più grandi, si predispone infine una postazione in cui sono messi a disposizione alcuni computer. Si propone l'utilizzo dei programmi *Cabrì Gèométre Plus II*, *Derive* ed *Autocad*, per svolgere alcuni esercizi che aiutino ad esplicitare e rendere quanto più possibile evidente la corrispondenza tra aspetto algebrico e relativa rappresentazione geometrica in un sistema di riferimento. Per quanto riguarda l'utilizzo di *Autocad*, si propone solo un semplice esercizio dimostrativo, in cui si realizza sul foglio di lavoro la costruzione di una casetta, assegnando le coordinate in un opportuno sistema rettangolare, per stimolare interesse e dare almeno un'idea delle potenzialità di tale programma, utilizzato di solito curricolarmente nei programmi di studio degli istituti tecnici. Di seguito si riportano le schede di lavoro predisposte con *Cabrì* e *Derive*.

Scheda 1
Sequenza di istruzioni da utilizzare con Cabri

1. Fissa il sistema di coordinate (comando *mostra gli assi).*
2. Disegna un punto X sull'asse *x* (comando *punto su un oggetto*).
3. Coordinate del punto X (comando *coordinate o equazioni*).
4. Scrivi un'espressione (solo la parte relativa alla variabile indipendente di una qualsiasi funzione data in forma esplicita, usando il comando *espressione*).
5. Applica l'espressione scritta all'ascissa del punto X (comando *applica espressione)* e clicca sul foglio.
6. Trasporta sull'asse *y* la misura comparsa: chiama Y il punto che compare sull'asse (usa il comando *trasporto di misura*).
7. Disegna le rette passanti per X ed Y rispettivamente parallele agli assi *x* e *y* (comando *rette parallele*).
8. Indica il *punto intersezione* di tali rette, chiamalo P e mostra le sue coordinate.
9. Usa il comando *traccia* cliccando, nell'ordine, sul punto P (clicca e rilascia il tasto sinistro del mouse), e sul punto X (mantenendo cliccato il pulsante sinistro del mouse trascina il punto X sull'asse x).
10. Usa il comando *luogo* cliccando una volta, nell'ordine, sul punto P e sul punto X.

Scheda 2
Questionario relativo al lavoro svolto con Cabri

1. Cosa accade trascinando con il mouse il punto X lungo l'asse x?
2. Sempre trascinando X, oltre alle coordinate di tale punto, si modificano di conseguenza anche le coordinate di altri punti? Se sì, in quale modo?
3. Da che cosa dipende il legame tra X ed Y?

4. Che cosa rappresenta l’insieme di punti o la linea che compare eseguendo le istruzioni di cui al punto 9 o 10 sopra riportati?
5. Cosa accade se si ruota attorno all’origine del sistema di riferimento l’asse delle ordinate? Si perde il legame tra la coordinata x e quella y del punto P?

Scheda 3

Scheda per esercizi con Derive

1. *Crea espressione* (se ad esempio si vuole scrivere l’equazione $x^2 + y^2 = 1$, con *Derive* si digita *solve* (x ^ 2 + y ^ 2 = 1, x, y)) e premi *invio.*
2. Apri una finestra grafica 2D.
3. Da *opzioni* seleziona *semplifica prima di tracciare il grafico*.
4. Traccia il grafico (seleziona l’icona corrispondente a tale comando).
5. Seleziona il pulsante *modalità traccia* e scorri con le freccette sulla tastiera. Cosa succede sul foglio da disegno?
6. Cosa indicano i numeri che compaiono sotto alla finestra grafica?
7. Ripeti i punti da 1 a 4 con una nuova espressione (ad esempio *solve* (y = x, x, y)).
8. Crea un sistema con le espressioni precedentemente create o selezionando *risolvi sistema* e segui le istruzioni che compaiono sullo schermo, oppure digita il sistema con l’opportuno simbolismo (ad esempio *solve* ([#1, #2], [x, y]) e premendo *invio*).
9. Seleziona *semplifica base*.
10. Cosa compare sullo schermo? Cosa rappresentano?
11. Seleziona il sistema e premi *semplifica approssima*. Quindi ripeti *semplifica base*.
12. Che differenza c’è tra i risultati ottenuti al punto 8 e quelli al punto 10?
13. Cosa significa risolvere un sistema?
14. C’è corrispondenza tra finestra algebrica e finestra grafica? Esprimi delle osservazioni in merito alla questione.

Osservazioni

I ragazzi della classe terza del “Liceo Linguistico Europeo Paolino d’Aquileia” di Gorizia che hanno partecipato a questa edizione 2006 di “La matematica dei ragazzi” avevano preso parte anche all’edizione precedente della manifestazione. Già al termine dell’edizione del 2004 si erano dichiarati entusiasti e pronti a partecipare di nuovo nel 2006. Memori dell’esperienza maturata, sono stati loro stessi a scegliere come interlocutori preferenziali principalmente bambini o ragazzini, al massimo di scuola media inferiore, avendo constatato di persona che questi dimostrano molto più entusiasmo, curiosità e partecipazione dei ragazzi più grandi. I laboratori sono stati quindi ideati e realizzati in questa precisa ottica. Il lavoro dei ragazzi si è rivelato un po' più autonomo rispetto alla volta scorsa, ed è consistito principalmente nell'elaborare giochi quanto più efficaci possibili per semplificare al massimo gli argomenti ed i contenuti relativi ai sistemi di riferimento. Tali argomenti sono stati peraltro sviluppati ed approfonditi in classe, rientrando nei programmi ministeriali per le classi terze degli istituti superiori, in cui appunto lo studio della geometria analitica copre buona parte del programma dell'anno.

Volutamente, i ragazzi hanno limitato il numero di laboratori adatti ai ragazzi più grandi. Come previsto, l'entusiasmo dimostrato dai più piccini è stato incoraggiante e motivo di notevole soddisfazione. I ragazzi impegnati a coinvolgere i piccini nei vari giochi, infatti, inizialmente dubbiosi e timorosi di non esser in grado di comunicare efficacemente e riuscire a trasmettere quanto si erano proposti, soprattutto a quei bambini che a mala pena conoscevano i numeri naturali e solo fino al dieci, ad un certo punto, contenti ed increduli, hanno cominciato ad esclamare e commentare: "*prof., ma capiscono davvero, fanno giusto!*".

Anche questa volta la comunicazione con i visitatori è stata improntata ad un dialogo continuo, ad una interazione che, con domande e suggerimenti mirati, era volta al coinvolgimento diretto ed attivo dei visitatori.

Per quanto riguarda gli insegnanti accompagnatori delle classi in visita, significativa può essere l'osservazione di una docente di scuola media, che ha molto apprezzato l'idea di sfruttare al massimo anche l'aspetto visivo per cercare di chiarire i concetti, come ad esempio la scelta di utilizzare colori diversi per differenziare le ascisse dalle ordinate e fissare un ordine preciso nell'assegnare le coordinate di un punto nel piano cartesiano: un approccio visivo, e semplificare almeno inizialmente al massimo gli argomenti, anche a costo di sacrificare il rigore, diventa infatti necessario e prioritario in una realtà scolastica sempre più variegata ed eterogenea, in cui non è più rara eccezione, ma normalità, l'inserimento di bambini provenienti da altri paesi, che ancora non sono in grado di parlare e comprendere chiaramente l'italiano. In tali casi, la sola comunicazione verbale o scritta convenzionale risulta infatti inefficace ed inadeguata. Il materiale proposto è quindi stato apprezzato come valido spunto anche per risolvere problematiche di questo tipo.

NOTE

* Liceo Linguistico Europeo
"Paolino d'Aquileia",
v. Seminario 7, 34170 Gorizia
e-mail: letizia.mucelli@libero.it

1 Tali argomenti sono stati affrontati in maniera più approfondita in classe durante le ore curricolari di filosofia, religione e fisica.

2 In questa sede non si riportano per brevità i dettagli del lavoro, peraltro facilmente reperibili nei testi di trigonometria (cfr. LAMBERTI et al., 1991).

BIBLIOGRAFIA

BOYER C.B., 1994, *Storia della Matematica*, Mondatori, Milano.

DODERO N., BARONCINI P., MANFREDI R., 2004, *Moduli di lineamenti di matematica (mod.F)*, Ghisetti & Corvi, Milano.

DODERO N., TOSCANI J., 1988, *Lezioni di matematica*, Ghisetti & Corvi, Milano.

LAMBERTI L., MEREU L, NANNI A., 1991, *Matematica due - Trigonometria*, Etas Libri, Milano.

SITI WEB

http://it.wikipedia.org/wiki/Coordinate_cartesiane.

http://digilander.libero.it/LeoDaga/DVS/refsys.htm.

http://www.skylive.it/pillole/Teoria_riferimenti.htm

parte terza

La matematica dei ragazzi
Scambi di esperienze tra coetanei

Aspetti motivazionali

Perché qualcuno fa qualcosa?
Analisi dal punto di vista motivazionale di una sperimentazione in didattica della matematica

Luciana Zuccheri* e Verena Zudini**

Sunto

Si presentano i risultati di un'indagine svolta su un campione di 182 allievi di scuola primaria e secondaria che hanno partecipato nel 2006 al progetto didattico "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei", *e si confrontano i dati relativi alla scuola secondaria superiore con quelli di un analogo campione raccolto nel 2004. La ricerca evidenzia che, grazie a metodologie di apprendimento di tipo collaborativo, il progetto riesce a coinvolgere la grande maggioranza degli allievi in attività molto impegnative, nell'ambito dell'apprendimento e dello studio della matematica. Ciò sembra suggerire l'opportunità di diffondere ulteriormente tali metodologie, soprattutto a livello di scuola secondaria.*

Introduzione

Perché una persona fa qualcosa? La motivazione è un costrutto ipotetico utilizzato per spiegare il comportamento di una persona, dove "spiegare" significa trovare i motivi di una data condotta (Rheinberg, 2002; cfr. anche Meister, 1977). La motivazione viene riconosciuta oggi come un costrutto complesso e multidimensionale, in cui sono coinvolti aspetti di diversa natura, sia cognitivi che affettivi, e che è legato ai contesti socioculturali, in cui il soggetto interagisce;

un costrutto dinamico, da considerare in una dimensione evolutiva, mai definitiva, e suscettibile di continui mutamenti e oggetto di possibili interventi (cfr. Mariani, 2006).

Compito della psicologia della motivazione è individuare e descrivere le componenti e i processi che concorrono alla motivazione, determinarne le cause e le condizioni di sviluppo e comprenderne gli effetti sul comportamento (cfr. Rheinberg, 2002). In campo psicoeducativo, l'approccio alla motivazione è stato profondamente influenzato in ogni momento storico dalla teoria dell'apprendimento dominante in quel periodo, e, in generale, si può dire che le teorie della motivazione si siano sviluppate parallelamente a quelle dell'apprendimento: così, da una visione comportamentista basata sullo schema di stimolo e risposta, modellata tramite rinforzi positivi o negativi, e da un apprendimento come trasmissione unidirezionale da un soggetto attivo (insegnante) a uno passivo (studente) si è passati in tempi più recenti a concezioni di tipo cognitivista, secondo le quali l'apprendimento è visto come un processo attivo, in cui lo studente rielabora i contenuti proposti nell'ambito delle sue esperienze pregresse e li filtra attraverso i suoi pensieri e sentimenti (cfr. Mariani, 2006).

Pur nella varietà e complessità di modelli e riferimenti teorici (cfr. Atkinson, 1964; McCombs & Pope, 1994; De Beni & Moè, 2000; Volet & Järvelä (a cura di), 2001; Gallistel (a cura di), 2002), si individuano concordemente tre elementi fondamentali nella motivazione:

a) gli obiettivi, ossia le rappresentazioni mentali di un evento desiderato o da evitare;

b) le reazioni affettive concomitanti alle varie fasi del comportamento motivato (dalla consapevolezza dell'obiettivo da raggiungere alla riuscita o non riuscita nel compito);

c) le percezioni o aspettative del soggetto sulla propria capacità di riuscita, competenza e autoefficacia e sulle risorse offerte dall'ambiente che lo circonda.

Sono fattori importanti per queste percezioni le esperienze pregresse di successo e insuccesso, l'atteggiamento dell'ambiente esterno, di genitori, insegnanti e della classe, ecc. (cfr. Brophy, 1998; Mariani, 2006).

La ricerca psicologica ha messo in evidenza come creando opportune condizioni nell'insegnamento si possa stimolare la naturale motivazione ad apprendere: si tratta di rendere gli alunni soggetti attivi del proprio apprendimento, facendo percepire le attività e i compiti da svolgere come legati alle loro esigenze e ai loro interessi e obiettivi personali; in quest'ottica, i compiti assegnati devono essere presentati con livelli di difficoltà corrispondenti alle capacità degli alunni, in ambienti psicologicamente protetti (sicuri) e di supporto, caratterizzati da rapporti umani positivi con adulti in grado di comprendere le potenzialità personali degli alunni e di intervenire in modo adeguato alle loro necessità di apprendimento e dalla possibilità e opportunità per gli allievi di mettersi alla prova senza paura di fallire (cfr. McCombs & Pope, 1994; Brophy, 1998).

Recentemente sono stati condotti studi più specifici sui legami tra aspetti affettivi e apprendimento della matematica. Tra questi, ricordiamo, in particolare, quelli presentati nei gruppi di lavoro dedicati al tema "Affect and mathematical thinking", nel corso dei Convegni CERME3 e CERME4 dell'ERME (European Society for Research in Mathematics Education; cfr. il sito web ufficiale per gli *Atti*). Un intero fascicolo della rivista *Educational Studies in Mathematics* (n. 63 (2), 2006), intitolato "Affect in Mathematics Education", è stato dedicato ai fattori affettivi e, in particolare, motivazionali e ai loro legami con l'apprendimento della matematica (cfr. Zan, Braun, Evans & Hannula, 2006; Hannula, 2006).

Nelle sperimentazioni didattiche condotte dal gruppo di ricerca "Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste" (in seguito, NRD) coordinato da Luciana Zuccheri, attivo presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Trieste, si è spesso osservato che si può favorire l'apprendimento facendo leva su fattori motivazionali.

In una sperimentazione basata sull'insegnamento della crittografia, realizzata più volte a vari livelli scolari (con allievi di 7-11 anni e con allievi di 15-16 anni), i fattori motivazionali sono emersi spontaneamente, mostrando che il contenuto stesso dell'insegnamento dava luogo a una attività motivante di per sé, al punto che gli allievi desideravano continuarla anche quando la sperimentazione era conclusa (cfr. Zuccheri, 1992; Sgarro & Zuccheri, 1992; Borelli, Fioretto, Sgarro & Zuccheri, 2002).

In altre esperienze, invece, l'elemento che è sembrato fondamentale per l'attivazione di fattori motivazionali è stato la metodologia utilizzata. Ciò si è potuto osservare nello svolgimento del progetto didattico "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei", già realizzato sei volte coinvolgendo numerose classi di tutti i livelli scolari pre-universitari. In tale esperienza, pur variando i contenuti dell'apprendimento, diversi per ciascuna classe partecipante, si utilizzano le stesse metodologie didattiche. Nel presente lavoro si esporranno i risultati di un'indagine realizzata in tale contesto, con lo scopo di accertare con metodi quantitativi e qualitativi i legami tra l'attività didattica svolta e gli aspetti motivazionali.

Obiettivi della ricerca

La manifestazione denominata "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei" è stata realizzata ogni due anni, a partire dal 1996. Essa è un progetto didattico rivolto a classi composte da bambini e ragazzi della fascia d'età 6-18 anni, i cui insegnanti collaborano all'interno del NRD, sviluppando percorsi didattici su contenuti matematici che gli allievi apprendono, per poi comunicarli ad altri bambini e ragazzi (coetanei o di età diversa) nell'ambito di un meeting aperto a tutti, che dura una giornata e mezza (cfr. Leder, Scheriani & Zuccheri, 2002a). Nelle varie fasi del lavoro (apprendimento dei contenuti, preparazione del meeting e partecipazione al meeting), si utilizzano metodologie didattiche basate sul lavoro di gruppo, sull'apprendimento cooperativo e sull'interazione tra ragazzi di pari o diversa età.

La partecipazione al meeting è sempre molto ampia (nell'edizione del 2006 è stata raggiunta la quota di 1.000 ragazzi visitatori e di circa 300 ragazzi relatori). La soddisfazione degli insegnanti che partecipano alla realizzazione del progetto è, in generale, molto grande, sia per l'esito del meeting, sia per le ricadute sull'apprendimento, a breve e a lungo termine, osservate nelle rispettive classi (cfr. Gallopin, 2003).

Nel corso degli anni sono state fatte delle indagini per rilevare in modo qualitativo e quantitativo le reazioni dei bambini/ragazzi coinvolti nel progetto, dal punto di vista emozionale (cfr. Leder, Scheriani & Zuccheri, 2002b) e relazionale (cfr. Zuccheri, Leder & Scheriani, 2004). Scopo della presente ricerca è di verificare, utilizzando dei dati distribuiti sui tre livelli scolari su cui si opera (scuola primaria, scuola secondaria di primo e di secondo grado), se e quanto i ragazzi coinvolti nel progetto siano motivati a svolgere questa attività e a quali fattori si debbano principalmente tali motivazioni.

Metodologia della ricerca

Per la nostra indagine analizzeremo principalmente i dati provenienti da una rilevazione fatta nel 2006, tramite un questionario somministrato alle classi partecipanti al progetto a breve distanza dalla conclusione del meeting. I questionari, riconsegnati anonimi, sono stati distribuiti e poi raccolti dai rispettivi insegnanti: in tutto, 182 elaborati, di cui 89 di allievi di scuola primaria (età 6-8 anni), 40 di scuola secondaria di primo grado (età 11-13 anni) e 53 di scuola secondaria di secondo grado (età 14-16 anni). Faremo inoltre un breve confronto, per la sola scuola secondaria di secondo grado, con 45 elaborati raccolti nel 2004, somministrando lo stesso questionario e seguendo la medesima procedura.

Il questionario, ottenuto con lievi modifiche da quello utilizzato in Gallopin (2003), teneva conto delle esigenze di comprensione del testo da parte degli allievi. Per i più piccoli (6 anni di età), le risposte sono state raccolte tramite intervista. Le domande erano suddivise in tre parti: la prima mirava a indagare gli aspetti legati alla preparazione del meeting, la seconda quelli legati alla partecipazione al meeting, la terza quelli legati alla valutazione a posteriori dell'attività svolta e, in particolare, al gradimento di questa, nel suo complesso. Altre domande miravano ad approfondire aspetti che esulano dalla presente ricerca: riporteremo di seguito solo l'analisi delle risposte più significative ai fini indicati.

Per effettuare l'analisi, i dati sono stati suddivisi in tre gruppi: P (Scuola primaria), S1 (Scuola secondaria di I grado), S2 (Scuola secondaria di II grado). I valori numerici, arrotondati alla prima cifra decimale, sono calcolati in percentuale all'interno di ogni gruppo considerato e, per la loro somma, rispetto al numero totale.

Dati riguardanti il gradimento dell'attività svolta

Ai fini dell'analisi, è opportuno considerare innanzitutto i risultati relativi al gradimento dell'attività svolta, nel suo complesso. Alla domanda "*Ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*" ben l'85.2% degli allievi ha risposto "*sì*", il 7.7% "*no*", il 3.3% "*sì* (per certi aspetti) *e no* (per altri aspetti)"; il 3.9% non ha risposto (cfr. Tabella 1). Risulta quindi che la grande maggioranza ha apprezzato l'esperienza svolta e la ripeterebbe volentieri. I dati evidenziano, però, una differenza all'interno dei tre livelli scolari. Infatti, nel gruppo S2 la percentuale di coloro che rispondono decisamente "*no*" è approssimativamente tripla rispetto a quelle degli altri gruppi.

Per comprendere le ragioni del gradimento o meno dell'attività svolta, consideriamo le domande "*Perché ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*" (cfr. Tabella 2) e "*Perché non ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*" (cfr. Tabella 3), alle quali si poteva rispondere scegliendo più di una tra le alternative indicate. Dalla moda delle risposte alla prima delle due domande, si rileva che prevale in ogni gruppo la *percezione del divertimento* (risposta *b*), mentre al secondo posto si colloca in ciascun gruppo il *piacere di lavorare con i compagni di classe* (risposta *f*); entrambi gli aspetti risultano più accentuati nei gruppi P e S1, rispetto al gruppo S2. Al terzo posto, considerando il totale, si colloca il *piacere di spiegare agli studenti visitatori* (risposta *c*), con percentuali abbastanza simili all'interno dei tre gruppi. Si rileva invece una notevole differenza nelle percentuali di risposte *e* del gruppo S1 rispetto agli altri (circa 18-20% in più), forse spiegabile con il diverso metodo didattico abitualmente usato dagli insegnanti in classe.

Risposte	Gruppo P	Gruppo S1	Gruppo S2	Totale
Sì	85.4%	90.0%	81.1%	85.2%
No	4.5%	5.0%	15.0%	7.7%
Sì e no	4.5%	2.5%	1.9%	3.3%
-Nessuna risposta-	5.6%	2.5%	1.9%	3.9%

Tabella 1 – "*Ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*"

Risposte	Gruppo P	Gruppo S1	Gruppo S2	Totale
a) È stata molto istruttiva	32.6%	42.5%	30.2%	34.0%
b) Mi sono divertito/a	60.7%	77.5%	49.0%	61.0%
c) Mi piaceva spiegare agli studenti visitatori	39.3%	35.0%	34.0%	36.8%
d) Ha migliorato il mio modo di esporre i concetti	24.7%	35.0%	20.8%	25.8%
e) È stato un modo diverso per apprendere i concetti di matematica	29.2%	50.0%	32.0%	34.6%
f) È stato bello lavorare con i compagni di classe	53.9%	60.0%	35.9%	50.0%
g) Altro	2.3%	2.5%	3.8%	2.8%

Tabella 2 – *"Perché ti piacerebbe ripetere l'esperienza?"*

Risposte	Gruppo P	Gruppo S1	Gruppo S2	Totale
a) L'impegno richiesto durante l'anno scolastico non è stato ripagato	1.1%	0%	7.6%	2.8%
b) Mi sono annoiato/a	3.4%	2.5%	11.3%	5.5%
c) Era faticoso spiegare agli studenti visitatori	4.5%	7.5%	3.8%	5.0%
d) Altro	1.1%	0%	3.8%	1.7%

Tabella 3 – *"Perché non ti piacerebbe ripetere l'esperienza?"*

Nelle risposte alla domanda "*Perché non ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*", nel gruppo S2 prevale la *percezione di noia* (risposta *b*), seguita dall'*insoddisfazione di non essere stati ripagati per il lavoro di preparazione* (risposta *a*); negli altri gruppi, invece, prevale la *sensazione di fatica provata dando spiegazioni ai visitatori* (risposta *c*), seguita dalla *percezione di noia* (risposta *b*).

Dati riguardanti la fase di preparazione del meeting

Per la fase di preparazione, è sembrato opportuno indagare sulla metodologia di lavoro seguita e sulle percezioni dei soggetti coinvolti riguardo al lavoro svolto, anche nei confronti di quello dei compagni.

Quasi tutti gli allievi (98.9% del totale) hanno lavorato in gruppo con i compagni nella fase di preparazione del meeting. Alla domanda "*Se hai lavorato in gruppo, hai trovato più facilità nell'assimilare i concetti di matematica?*", il 91.2% degli allievi risponde "*sì*". All'interno dei gruppi, però, la percentuale si differenzia: dal 96,6% del gruppo P e dal 95% di S1, scende al 79.3% nel gruppo S2.

Gli allievi dei gruppi S1 e S2 hanno dovuto svolgere il lavoro di preparazione in orario extracurricolare. A questi è stato chiesto se per loro fosse faticoso frequentare le attività pomeridiane e se lo facessero volentieri. Il 22.5% del gruppo S1 e il 66% del gruppo S2 ha risposto che ciò *era faticoso*; tuttavia, l'85% del gruppo S1 e il 52.83% del gruppo S2 ha risposto che *lo faceva volentieri*. È da notare che il 10% di S1 e il 22.6% di S2 hanno dato entrambe le risposte, dimostrando di essere capaci di svolgere volentieri anche un'attività percepita come faticosa.

Le ragioni di tali risposte sono state approfondite con le domande "*Era faticoso perché…*" (cfr. Tabella 4) e "*Venivo volentieri perché…*" (cfr. Tabella 5), in cui si poteva scegliere più di un'alternativa. Dai dati si rileva che il compito era particolarmente gravoso per il gruppo S2, più oberato dai compiti a casa e più impegnato in altre attività pomeridiane (nelle scuole secondarie di II grado coinvolte

Risposte	Gruppo S1	Gruppo S2
a) Avevo molti compiti da fare e materie da studiare	7.5%	20.8%
b) Dovevo organizzarmi per riuscire a fare anche le altre attività	17.5%	47.2%
c) Altro	0%	9.4%

Tabella 4 – *"Era faticoso perché…"*

Risposte	Gruppo S1	Gruppo S2
a) Mi divertivo a lavorare insieme con i miei compagni	65.0%	35.9%
b) Avevo paura di fare brutta figura durante la manifestazione	7.5%	1.9%
c) Mi sentivo particolarmente motivato/a e coinvolto/a	27.5%	17.0%
d) Altro	7.5%	7.6%

Tabella 5 – *"Venivo volentieri perché…"*

nel progetto, infatti, si svolgono numerose attività extracurricolari nelle più varie discipline e i ragazzi spesso praticano anche attività sportive al di fuori della scuola). La ragione principale per cui la gran parte di loro svolgeva volentieri questa attività è che *considerava divertente lavorare insieme con i compagni* (65% di S1, 35.9% di S2).

Durante la preparazione del meeting, risulta infine che solo il 13.7% degli allievi ritengono che i compagni abbiano lavorato meno di loro (14.6% del gruppo P, 10% di S1, 15% di S2). Nessuno ritiene che i compagni non abbiano lavorato affatto.

Dati riguardanti la fase di svolgimento del meeting

Per quel che riguarda la fase di svolgimento del meeting, alcune domande servivano a indagare sulle difficoltà incontrate, sulle convinzioni riguardo al lavoro dei compagni e sulla percezione di apprezzamento del lavoro svolto.

Alla domanda "*Hai avuto difficoltà durante la spiegazione?*", il 76.9% del totale risponde "*no*" (77.5% del gruppo P, 75% di S1, 77.4% di S2). Tra le cause delle difficoltà avute, prevale nel gruppo P la risposta "*Non riuscivo a spiegarmi bene*" (9%) e nei gruppi S1 e S2 "*I ragazzi visitatori non erano interessati*" (15% in S1 e 9.4% in S2).

Ben l'85.2% del totale, durante lo svolgimento del meeting, ha notato uno *spirito di collaborazione da parte dei compagni* (87.6% del gruppo P, 92.5% di S1, 75.5% di S2); inoltre, solo l'11% degli allievi ritiene che i compagni abbiano lavorato di meno (14.6% del gruppo P, 7.5% di S1, 9.4% di S2). Nessuno ritiene che i compagni non abbiano lavorato affatto.

L'*apprezzamento da parte degli altri del proprio lavoro* è stato sentito dal 91.2% del totale; la percentuale è massima per la scuola primaria e decresce all'aumentare del livello scolare (95.5% nel gruppo P, 90% in S1, 84.9% in S2). Mediamente, però, è stato maggiormente percepito l'apprezzamento da parte dell'insegnante (73.6% del totale) e dei visitatori (70.3% del totale), rispetto a quello dei compagni (42.9% del totale).

Dati riguardanti la valutazione del lavoro svolto

Alcune domande miravano a indagare sui possibili legami tra la partecipazione alla manifestazione e questioni affettive come il *rafforzamento dei rapporti con i compagni*. Da queste risulta che la maggioranza ritiene che questa esperienza abbia migliorato il proprio rapporto con i compagni (64.8% del totale) e che sia stata una buona occasione per conoscerli meglio (76.4% del totale), anche se questa convinzione decresce con l'aumentare dell'età (nel primo caso, 70.8% di P, 65% di S1, 54.7% di S2; nel secondo, 84.3% di P, 77.5% di S1, 62.3% di S2).

Altre domande servivano a verificare se la partecipazione al progetto fosse stata utile agli allievi per *scoprire in se stessi nuove capacità*. Il 75.3% del totale ha risposto "*sì*", ma le differenze tra i gruppi sono notevoli, spiegabili con la differenza d'età (96.6% del gruppo P, 65% di S1, 47.2% di S2). Le capacità maggiormente emerse in tutti i gruppi sono, nell'ordine, quelle di comunicazione e organizzative.

Un altro gruppo di domande serviva a far emergere la *percezione soggettiva dell'efficacia del lavoro svolto* durante il meeting e delle *ragioni di eventuali insuccessi*. Il 41.2% del totale afferma di non aver reso sempre secondo le proprie aspettative durante il meeting (32.6% di P, 55% di S1, 45.3% di S2). Le cause di ciò vengono riconosciute soprattutto in se stessi, come le seguenti: la *timidezza*, che viene esplicitata in tutti i gruppi (17.6% del totale; 14.6% di P, 25% di S1, 17% di S2), e la *paura*, che, però, viene menzionata per lo più dai più giovani (13.2% del totale; 11.2% di P, 32.5% di S1, 1.9% di S2). Una piccola parte individua altre cause esterne, tra cui la prevaricazione dei compagni (2.7% del totale) e lo scarso interesse da parte dei visitatori (3.3%).

Osserviamo infine che solo il 20.9% del totale degli allievi aveva già partecipato a precedenti edizioni del meeting "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei", la maggior parte come visitatori e una minima parte come protagonista. Questi ultimi (10 allievi, pari al 5.5% del totale) hanno tutti affermato che rifarebbero volentieri l'esperienza e 8 di essi hanno risposto che la rifarebbero perché si sono divertiti. *Non è stato perciò rilevato alcun effetto di "noia" dovuto alla ripetizione dell'esperienza.*

Un confronto con i dati raccolti nel 2004

Indichiamo ora con T2 il gruppo dei dati raccolti nel 2004, somministrando il questionario ad allievi di scuola secondaria di secondo grado, e compariamo le risposte dei gruppi T2 e S2.

Riguardo al gradimento dell'attività svolta, emerge una differenza: solo il 2.2% di T2 ha risposto decisamente che non rifarebbe volentieri l'esperienza, contro il 15.1% di S2, e il 4.4% di T2 ha risposto che lo rifarebbe per certi aspetti e non lo rifarebbe per altri (1.9% in S2). Il motivo principale per cui gli allievi del gruppo T2 non vorrebbero ripetere l'esperienza è che "*era faticoso spiegare agli studenti visitatori*".

Le risposte alle altre domande danno risultati abbastanza simili tra loro, tranne le seguenti:

a) il gruppo T2 ha percepito, decisamente in misura maggiore, il senso di divertimento nella partecipazione alla manifestazione (71.1% in T2 contro 49% in S2);

b) pur essendo quasi uguali nei due gruppi le percentuali di coloro che affermano di aver partecipato volentieri alle attività extracurricolari di preparazione al meeting, la percentuale degli allievi del gruppo T2 che lo ha fatto con fatica (33.3%) è stata la metà di quella di S2 (66%);

c) l'apprezzamento del lavoro svolto da parte dei visitatori è stato sentito molto di più in T2 (84.4%) rispetto a S2 (56.7%);

d) una maggior percentuale di T2 ha affermato di non aver reso sempre secondo le proprie aspettative (64.4%) rispetto a quella di S2 (45.3%), e una buona parte di questi allievi riconosce come causa di insuccesso la propria timidezza (48.9% in T2, 17% in S2).

Conclusioni

Dall'altissima percentuale delle risposte affermative alla domanda "*Ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*" date dagli allievi ai quali è stato sottoposto il questionario, sia nel 2004 sia nel 2006, e soprattutto dal fatto che per la maggioranza di questi una delle ragioni per rifarla è che l'ha percepita come "*divertente*", ci sembra di poter dire che l'obiettivo di motivare gli allievi a svolgere le attività del progetto "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei" è stato ampiamente raggiunto.

Nella metodologia utilizzata per lo svolgimento del progetto sussistono vari fattori riconosciuti utili dall'attuale ricerca in campo psicologico per suscitare negli allievi la motivazione a impegnarsi nel portare a termine il compito assegnato. Considerando quanto detto nell'introduzione al presente lavoro, basti pensare al fatto che gli alunni sono stati resi soggetti attivi del proprio apprendimento, con compiti di difficoltà corrispondente alle loro capacità e svolti in un ambiente psicologicamente protetto, col supporto degli insegnanti e dei compagni.

Dall'analisi dei dati sopra esposta emerge in primo luogo che, nel caso da noi considerato, tra questi fattori riveste un particolare rilievo l'attività di collaborazione in gruppo con i compagni, che, come viene riconosciuto dalla grande maggioranza degli allievi, facilita nella fase di preparazione, aiutando a comprendere meglio i concetti. La collaborazione con i compagni è molto sentita da quasi tutti gli allievi in tutte le fasi dell'attività, li stimola a partecipare al lavoro, se necessario, in orario extracurricolare ed è la seconda ragione per la quale la gran parte di loro rifarebbe volentieri l'esperienza.

È risultata anche molto diffusa la percezione dell'apprezzamento, soprattutto da parte dell'insegnante e dei visitatori, del lavoro svolto.

Questi fattori aiutano evidentemente la gran maggioranza degli allievi, durante lo svolgimento del meeting, a superare gli ostacoli che si presentano: la timidezza (riconosciuta da una consistente parte degli allievi di tutte le età), l'ansia da prestazione e le frustrazioni conseguenti agli insuccessi. Evidenziamo, infatti, che una buona parte degli allievi (34% del totale nel 2006 e 57.8% di T2 nel 2004) ha risposto *sia* che non ha reso secondo le proprie aspettative, *sia* che rifarebbe volentieri l'esperienza.

In tutte le fasce d'età, emerge inoltre, anche se in misura minore, come motivazione a ripetere l'esperienza, il piacere di comunicare agli altri quanto si sa.

Ci sono ovviamente delle eccezioni. Analizzando i pochi casi di allievi che, nei due anni in cui è stata svolta l'indagine, hanno risposto negativamente alla domanda "*Ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*", si nota che la gran parte di loro ha riconosciuto la collaborazione dei compagni e l'apprezzamento del lavoro svolto, ma che ciò non è stato sufficiente per superare le difficoltà, come la timidezza o la fatica nello svolgere il compito, per cui non ha percepito l'attività come un divertimento. Alla domanda "*Perché non ti piacerebbe ripetere l'esperienza?*", la maggioranza di loro ha infatti risposto che si è annoiata e, quasi la metà, che era faticoso spiegare ai visitatori. Riportiamo tre risposte emblematiche (spontanee) del 2006:

Allievo A:	*Perché mi vergognavo tanto.*
Allievo B:	*Richiede troppe ore pomeridiane.*
Allievo C:	*Richiede troppi preparativi.*

Uno dei motivi, ampiamente riconosciuti, della poca propensione dei giovani allo studio delle materie scientifiche (che attualmente costituisce un grosso problema per molti dei Paesi più sviluppati) è la scarsa volontà di dedicarsi a esse con il dovuto impegno. La presente ricerca ha messo in rilievo il fatto che, grazie a metodologie di apprendimento di tipo collaborativo, il progetto "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei" riesce a coinvolgere la grande maggioranza degli allievi in attività molto impegnative, nell'ambito dell'apprendimento e anche dello studio della matematica. Riteniamo che ciò possa suggerire l'opportunità di una più ampia diffusione di tali metodologie, soprattutto a livello di scuola secondaria.

NOTE

* Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste, e-mail: zuccheri@units.it

** Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca, e-mail: verena.zudini@unimib.it

BIBLIOGRAFIA

Atkinson J.W., 1964, *An Introduction to Motivation*, Van Nostrand, Princeton, N. Y. (ed. it. *La motivazione*, Il Mulino, Bologna, 1973).

Borelli M., Fioretto A., Sgarro A., Zuccheri L., 2002, "Cryptography and Statistics: A Didactical Project", in *Proceedings of the 2nd ICTM*, John Wiley & Sons Inc., paper n. 265, pp. 1-6.

Brophy J., 1998, *Motivating Students to Learn*, McGraw-Hill, New York (ed. it. *Motivare gli studenti ad apprendere*, LAS, Roma, 2003).

De Beni R., Moè A., 2000, *Motivazione e apprendimento*, Il Mulino, Bologna.

Gallistel R. (a cura di), 2002, *Stevens' Handbook of Experimental Psychology. Volume 3: Learning, Motivation and Emotion*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Gallopin P., 2003, "A mathematical project realised in a non formal environment: learning as a social event", in Mariotti M.A. (a cura di), *CERME3 Proceedings*, Edizioni Plus, p. 2.

Hannula M.S., 2006, "Motivation in Mathematics: Goals Reflected in Emotions", *Educational Studies in Mathematics*, Affect in Mathematics Education, vol. 63 (2) pp. 165-178.

Leder D., Scheriani C., Zuccheri L., 2002a, "The Mathematics of the boys/girls: exchange of experiences among boys/girls of the same age", in Novotna J. (a cura di), *CERME2 Proceedings*, Charles University, Faculty of Education, Prague, p. 259.

Leder D., Scheriani C., Zuccheri L., 2002b, "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Una valutazione del lavoro svolto", in Zuccheri L., Leder D., Scheriani C. (a cura di), 2002, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 1996-1998*, EUT, Trieste, pp. 167-179.

Mariani L., 2006, *La motivazione a scuola. Prospettive teoriche e interventi strategici*, Carocci, Roma.

McCombs B.L., Pope J.E., 1994, *Motivating hard to reach students*, APA, Washington, D.C. (ed. it. *Come motivare gli alunni difficili. Strategie cognitive e relazionali*, Erickson, Trento, 1996).

Meister H., 1977, *Förderung schulischer Lernmotivation. Eine Einführung in die Motivationspsychologie unter pädagogischen Gesichtspunkten*, Schwann, Düsseldorf (ed. it. *La motivazione. Un'introduzione alla psicologia della motivazione per promuovere l'apprendimento scolastico*, Armando, Roma, 1983).

Rheinberg F., 2002, *Motivation*, Kohlhammer, Stuttgart, 2. ed. (2. ed. it. *Psicologia della motivazione*, Il Mulino, Bologna, 2003).

Sgarro A., Zuccheri L., 1992, "I codici segreti nell'insegnamento della matematica", in *Atti del Convegno "Media e metodi III: la matematica tra didattica e cultura"*, LIS, Trieste, pp. 131-140.

Volet S., Järvelä S. (a cura di), 2001, *Motivation in learning contexts. Theoretical advances and methodological implications*, Pergamon, Amsterdam etc.

Zan R., Braun L., Evans J., Hannula M.S., 2006, "Affect in Mathematics Education: An Introduction", *Educational Studies in Mathematics*, Affect in Mathematics Education, vol. 63 (2), pp. 113-121.

Zuccheri L., 1992, "Crittografia e Statistica nella Scuola Elementare", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 15 (1), pp. 19-38.

Zuccheri L., Leder D., Scheriani C., 2004, "Osservazioni su 'La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei' con riguardo ad aspetti emotivo-relazionali", in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 223-232.

siti web

Sito ufficiale dell'ERME: *http://ermeweb.free.fr*